Die Umrechnung der Raketengleichung von der diskreten in die kontinuierliche Darstellung

Wolfgang Tomischko
Technische Universität Wien
Institut für chemische Technologien und Analytik
Getreidemarkt 9 / 164 – AC
1060 Wien

Korrektur durch Herrn Ao Prof Dr. Winfried Auzinger, 11.10.2019
Endfassung: 16.10.2019.

Abstract: Die Raketengrundgleichung der Raumfahrtphysik wurde erstmals 1903 von Konstantin Ziolkowski und unabhängig von ihm später auch von Hermann Oberth und Robert Goddard aufgestellt. Sie ist die Bewegungsgleichung einer ansonsten kräftefreien Rakete, die durch kontinuierlichen Ausstoß von Stützmasse beschleunigt. Sie gibt insbesondere die maximal erreichbare Geschwindigkeit der Rakete an.[1] Diese Gleichung kann aus den Newtonschen Gesetzen sowohl aus dem (natürlich nur theoretischen) diskreten Ausstoß von Stützmasse als auch aus dem realen kontinuierlichen Ausstoß von Stützmasse abgeleitet werden. Die Darstellung des mathematischen Zusammenhangs zwischen diesen beiden Zugängen fehlt jedoch in den Lehrunterlagen. Ziel dieses Textes ist es, diese Brücke aufzuzeigen. Daher werden die Gravitationskräfte in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Die weiterführenden Betrachtungen zur Anwendung unter realen Bedingungen sind ausreichend publiziert und finden in vorliegendem Text keine Erwähnung.

1. Definition der Variablen

$m(0)$	[kg]	Gesamtmasse der Rakete zu Beginn des Prozesses.
n	[1]	Nummer des Prozessschrittes, bei dem Stützmasse ausgestoßen wird. Die unabhängige Variable, auf die die momentane Raketenmasse und Raketengeschwindigkeit bezogen sind.
k	[1]	Letzte Nummer des Prozessschrittes, üblicherweise der Brennschluss.
μ	[kg]	Menge der Stützmasse, die pro Prozessschritt ausgestoßen wird.
v_g	[m/s]	Ausstoß – Geschwindigkeit der Stützmasse. Für vorliegende Betrachtung wird sie (im Gegensatz zur technischen Realität) als konstant angenommen.
$\Delta v(n)$	[m/s]	Änderung der Geschwindigkeit der Rakete durch den Prozessschritt n.
$v(0)=0$	[m/s]	Zu Beginn des Prozesses befindet sich die Rakete in Ruhe.
$v(k)$	[m/s]	Geschwindigkeit der Rakete nach dem letzten Prozessschritt. Es gilt

$$v(k) = \sum_{n=1}^{k} \Delta v(n)$$

Eq 01

Durch den Ausstoß von Stützmasse reduziert sich die Gesamtmasse der Rakete nach dem Prozessschritt n auf m(n) [kg]. Es gilt

$$m(0) - \mu \cdot n = m(n)$$

Eq 02

[1] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Raketengrundgleichung , letzter Zugriff 27.08.2019

Bzw. nach dem letzten Prozessschritt

$$m(0) - \mu \cdot k = m(k)$$

Eq 03

2. Ableitung der Raketengrundgleichung aus dem kontinuierlichen Ausstoß von Stützmasse

Das Bezugssystem ist das Schwerpunktsystem der Rakete. Im Schwerpunktsystem ist der Gesamtimpuls gleich 0 und damit auch jede Änderung des Gesamtimpulses:

$$d(mv) = \ 0 = mdv + vdm$$

Eq 04

Wird Stützmasse dm mit der Geschwindigkeit $-v_g$ ausgestoßen, so ändert sich der Impuls der Rakete um mdv.[2]

$$-v_g \, dm = mdv$$

Eq 05

Trennung der Variablen

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v_g}$$

Eq 06

Integration

$$\int_{m(0)}^{m(k)} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_g} \int_{0}^{v(k)} dv$$

Eq 07

Elementarumformung[3]

$$ln\,(m(k)) - \ln(m(0)) = -\frac{v(k)}{v_g}$$

Eq 08

$$v(k) = -\,v_g \cdot ln \frac{m(k)}{m(0)}$$

Eq 09

$$v(k) = v_g \cdot ln \frac{m(0)}{m(k)}$$

Eq 10

Das ist die Raketengrundgleichung in ihrer einfachsten Form.

---

[2] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Raketengrundgleichung , letzter Zugriff 29.08.2019.

[3] Man verzeihe die stark simplifizierte Methode der Lösung dieser Differentialgleichung.

3. Ableitung der Raketengrundgleichung aus dem diskreten Ausstoß von Stützmasse

Aufgrund der Impulserhaltung gilt nach jedem Prozessschritt

$$\Delta v_n = \frac{v_g \cdot \mu}{m(n)} \quad \text{Eq 11}$$

[4]

Zusammengefasst ergibt sich für die Endgeschwindigkeit nach dem letzten Prozessschritt

$$v(k) = \sum_{n=1}^{k} \Delta v_n = \sum_{n=1}^{k} \frac{v_g \cdot \mu}{m(n)} \quad \text{Eq 12}$$

Da v_g konstant ist, kann dieser Ausdruck herausgehoben werden

$$v(k) = v_g \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{\mu}{m(n)} \quad \text{Eq 13}$$

Einsetzen von Eq 02

$$v(k) = v_g \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{\mu}{m(0) - \mu \cdot n} \quad \text{Eq 14}$$

Da sich k als Funktion von m(0), m(k) und μ darstellen lässt, formuliert man

$$m(0) - \mu \cdot k = m(k) \quad \text{Eq 03}$$

Elementarumformung

$$k = \frac{m(0) - m(k)}{\mu} \quad \text{Eq 15}$$

Einsetzen in Eq 14

$$v(k) = v_g \cdot \sum_{n=1}^{\frac{m(0)-m(k)}{\mu}} \frac{\mu}{m(0) - \mu \cdot n} = v_g \cdot \sum_{n=1}^{\frac{m(0)-m(k)}{\mu}} \frac{1}{\frac{m(0)}{\mu} - n} \quad \text{Eq 16}$$

Um den Übergang zur Raketengrundgleichung aus dem <u>kontinuierlichen</u> Ausstoß von Stützmasse zu vollführen, lässt man den Ausstoß von Stützmasse pro Prozessschritt μ gegen 0 gehen.

Limesbildung

$$v(k) = v_g \cdot \lim_{\mu \to 0} \sum_{n=1}^{\frac{m(0)-m(k)}{\mu}} \frac{1}{\frac{m(0)}{\mu} - n} \quad \text{Eq 17}$$

---

[4] Korrekterweise wäre die Änderung der Geschwindigkeit negativ zu rechnen, aufgrund der oben genannten speziellen Bedingungen kann dies in vorliegender Arbeit aber unterbleiben.

Diese Form ist zur konkreten Berechnung des Grenzwertes nicht direkt verwendbar. Daher betrachten wir diese Reihe allgemein.

$$\sum_{n=1}^{a-b}\frac{1}{a-n}=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\cdots+\frac{1}{a-a+b}=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\cdots+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b}$$

Eq 18

Da a > b sein muss, werden die Reihenglieder so umsortiert, dass die Werte im Nenner steigend angeordnet sind:

$$\sum_{n=1}^{a-b}\frac{1}{a-n}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\cdots+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-1}$$

Eq 19

Man erkennt das alternative Bildungsgesetz

$$\sum_{n=1}^{a-b}\frac{1}{a-n}=\sum_{n=b}^{a-1}\frac{1}{n}$$

Eq 20

Anwendung auf Eq 17

$$v(k) = v_g \cdot \lim_{\mu\to 0}\sum_{n=1}^{\frac{m(0)-m(k)}{\mu}}\frac{1}{\frac{m(0)}{\mu}-n}=v_g \cdot \lim_{\mu\to 0}\sum_{n=\frac{m(k)}{\mu}}^{\frac{m(0)}{\mu}-1}\frac{1}{n}$$

Eq 21

Dies ist aber noch keine harmonische Reihe, da sie nicht mit n = 1 beginnt. Daher wird diese Reihe in die Differenz zweier Reihen, die beide mit n = 1 beginnen geteilt:

$$v(k) = v_g \cdot \lim_{\mu\to 0}\left(\sum_{n=1}^{\frac{m(0)}{\mu}-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\frac{m(k)}{\mu}-1}\frac{1}{n}\right)$$

Eq 22

Die asymptotische Entwicklung der harmonischen Reihe lautet allgemein [5]

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

Eq 23[6]

Anwendung von Eq 23 auf Eq 22[7]

[5] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe , letzter Zugriff 28.08.2019.

[6] γ ist die Euler – Mascheroni – Konstante. Siehe dazu https://de.wikipedia.org/wiki/Euler-Mascheroni-Konstante , letzter Zugriff 29.08.2019.

[7] Das Weglassen des Restgliedes ist wohl argumentierbar, da n im vorliegenden Fall über alle Grenzen geht.

$$v(k) = v_g \cdot \lim_{\mu \to 0} \left(\sum_{n=1}^{\frac{m(0)}{\mu}-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\frac{m(k)}{\mu}-1} \frac{1}{n} \right) = v_g \cdot \lim_{\mu \to 0} \left(ln\left(\frac{m(0)}{\mu} - 1\right) + \gamma - ln\left(\frac{m(k)}{\mu} - 1\right) - \gamma \right)$$

Elementarumformung

$$v(k) = v_g \cdot \lim_{\mu \to 0} \left(ln \frac{\frac{m(0)}{\mu} - 1}{\frac{m(k)}{\mu} - 1} \right) = v_g \cdot \lim_{\mu \to 0} \left(ln \frac{m(0) - \mu}{m(k) - \mu} \right)$$

Eq 24

$$v(k) = v_g \cdot ln \frac{m(0)}{m(k)}$$

Eq 25

4. Zusammenfassung

Da Eq 25 gleich Eq 10 ist, kann die beabsichtigte Darstellung der Ableitung der Formel für den kontinuierlichen Ausstoß von Stützmasse aus dem diskontinuierlichen Fall als gelungen betrachtet werden.