Ein einfacher Überblick über die Maxwell – Gleichungen[1]

Wolfgang Tomischko

1. Abstract

Die Maxwell – Gleichungen von James Clerk Maxwell (1831–1879) beschreiben die Phänomene des Elektromagnetismus. Sie sind damit ein wichtiger Teil des modernen physikalischen Weltbildes. Die Gleichungen beschreiben, wie elektrische und magnetische Felder untereinander sowie mit elektrischen Ladungen und elektrischem Strom unter gegebenen Randbedingungen zusammenhängen. Zusammen mit der Lorentzkraft erklären sie alle Phänomene der klassischen Elektrodynamik. Sie bilden daher auch die theoretische Grundlage der Optik und der Elektrotechnik. Die Gleichungen sind nach dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell benannt, der sie von 1861 bis 1864 erarbeitet hat. Er kombinierte dabei das Durchflutungsgesetz und das Gaußsche Gesetz mit dem Induktionsgesetz und führte zusätzlich, um die Kontinuitätsgleichung nicht zu verletzen, den ebenfalls nach ihm benannten Verschiebungsstrom ein.

In der Unterrichtspraxis zeigt sich immer wieder, dass diesem Modell ein Gefühl des Schwierigen, der Mystik und des Pathos anhaftet, was dem sachlichen und praktikablen Umgang gerade im Lehrbetrieb abträglich ist. Die Ehre gebührt den Wissenschaftlern des 19. Jahrhunderts, die unter für uns kaum vorstellbaren Bedingungen solche Leistungen erbracht haben, nicht aber dem Modell. In diesem Aufsatz wird versucht, das Konzept und die Aussagen der Maxwell – Gleichungen möglichst einfach darzustellen.

2. Mathematische Grundlagen

Die Maxwell – Gleichungen können auf verschiedene Weisen formuliert werden. Notwendig zum Verständnis sind allgemeine Grundkenntnisse der Vektoranalysis.

2.1. Zylinderkoordinaten[2]

Zylinderkoordinaten oder zylindrische Koordinaten sind im Wesentlichen ebene Polarkoordinaten, die um eine dritte Koordinate ergänzt sind. Diese dritte Koordinate beschreibt die Höhe eines Punktes senkrecht über (oder unter) der Ebene des Polarkoordinatensystems und wird im Allgemeinen mit z bezeichnet. Die Koordinate ρ beschreibt jetzt nicht mehr den Abstand eines Punktes vom Koordinatenursprung, sondern von der z – Achse.

Wenn man ein kartesisches Koordinatensystem so ausrichtet, dass die z – Achsen zusammenfallen, die x – Achse in Richtung φ =0zeigt und der Winkel φ von der x – Achse zur y – Achse wächst (rechtsgerichtet ist), dann ergeben sich die folgenden Umrechnungsformeln zwischen Zylinderkoordinaten und kartesischen Koordinaten:

$$x = \rho\cos(\varphi)$$
$$y = \rho\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

Die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ist etwas schwieriger, weil man mathematisch gesehen dabei immer auf eine (nicht den gesamten Wertebereich des

[1] Unter Verwendung von https://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen , letzter Zugriff 29.03.2021.
[2]Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#Zylinderkoordinaten, letzter Zugriff 13.04.2021.

Vollwinkels umfassende) trigonometrische Umkehrfunktion angewiesen ist. Zunächst kann aber der Radius ρ (oder auch r) mit dem Satz des Pythagoras einfach wie folgt berechnet werden:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für die Berechnung von φ kann beispielsweise die Gleichung

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Verwendet werden, man muss sich aber des eingeschränkten Wertebereichs sowie der Mehrdeutigkeit bewusst sein!

Vor einer möglichen Verwechslung ist zu warnen: Das waren die Umrechnungsformeln! Die Einheitsvektoren in Richtung zunehmender r,φ,z– Koordinaten in Zylinderkoordinaten lauten hingegen

$$\widehat{e_r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

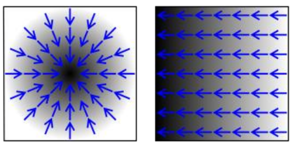
$$\widehat{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2. Gradient

Der Gradient[3]ist eine Verallgemeinerung der Ableitung in der mehrdimensionalen Analysis.Als Differentialoperator kann er beispielsweise auf ein Skalarfeld angewandt werden und liefertin diesem Fall ein Vektorfeld, das Gradientenfeld genannt wird.

In kartesischen Koordinaten sind die Komponenten des Gradient – Vektors die partiellen Ableitungen im Punkt P, der Gradient zeigt deshalb in die Richtung der größten Änderung. Der Betrag des Gradienten gibt den Wert der größten Änderungsrate an diesem Punkt an.



← Zwei Skalarfelder, dargestellt als Grauschattierung (dunklere Färbung entspricht größerem Funktionswert). Die blauen Pfeile darauf symbolisieren den zugehörigen Gradienten.

[3] Unter Verwendung von https://de.wikipedia.org/wiki/Gradient_(Mathematik), letzter Zugriff 29.03.2021.

Interpretiert man beispielsweise die Reliefkarte einer Landschaft als eine Funktion h(x, y), die jedem Ort die Höhe an dieser Stelle zuordnet, dann ist der Gradient von h an der Stelle (x, y) ein Vektor, der in die Richtung des größten Höhenanstiegs von h zeigt. Der Betrag dieses Vektors gibt die größte Steigung an diesem Punkt an.

Der Gradient wird mit dem Nabla – Operator $\vec{\nabla}$ oder auch nur ∇ gebildet. Die Vektor –Schreibweise ist vorzuziehen, da diese andeutet, dass der Nabla – Operator hilfsweise als Vektor verstanden werden kann.

<u>Berechnung</u>: Gegeben sei das reelle Skalarfeld $f(\vec{r})$als Funktionin kartesischen Koordinaten

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,;\ \vec{r}\ \in\ \mathbb{R}^n\,; b\ \in\ \mathbb{R}: f(\vec{r}) \to b$$

Dann hat der Gradient die euklidische Darstellung

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = grad\, f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Die Schreibweisen Nabla und grad werden synonym verwendet. Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor. Hier wird er im euklidischen Raum dargestellt, aufgrund des einfachen Bildungsgesetzes sollte klar sein, dass er auch mit beliebig vielen Dimensionen > 1 gebildet werden kann. Dann wird die für euklidische Koordinaten reservierte Notation x, y, z durch x_1, x_2, x_3, etc. ersetzt. Sollte der Argumentvektor als bekannt vorausgesetzt werden, kann er wie angeführt auch weggelassen werden, um eine kompaktere Darstellung zu erzielen.

<u>Beispiel</u>

$$f(\vec{r}) = (2x^2 + xy - y^3)\ \to \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 4x + y \\ x - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Eine bedeutsame Eigenschaft der aus dem Gradienten hervorgegangenen speziellen Vektorfelder ist die <u>Integrabilitätsbedingung</u>. Das bedeutet, dass solche sogenannten Gradientenfelder nach dem Satz von Schwarz immer „integrabel" sind. Da solche Gradientenfelder in der Physik die besondere Bedeutung haben, dass sie von Zentralkräften hervorgebracht werden, nennt man sie auch Potentialfelder.

Gegeben sei ein reelles n – dimensionales Gradientenfeld $\overrightarrow{G_n}(\overrightarrow{x_{1\ldots n}})$. Dann gilt für alle i, k $\in \mathbb{N}$;i, k $\leq$ n; i $\neq$k

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_k} - \frac{\partial G_k}{\partial x_i} = 0$$

Äquivalent zur Integrabilitätsbedingung sind folgende Eigenschaften der Gradientenfelder:

- Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals: Der Wert des Kurvenintegrals entlang einer beliebigen Kurve innerhalb des Feldes ist nur von ihrem Anfangs- und Endpunkt abhängig, nicht dagegen von ihrer Länge.

- Verschwinden des Ringintegrals für beliebige Randkurven:$\oint \vec{G}(\vec{r})\, d\vec{r} = 0$

- Generelle Rotationsfreiheit bzw. Wirbelfreiheit des Feldes: $rot\ \overrightarrow{G_n}(\overrightarrow{x_{1\dots n}}) = 0$

Beispiel Integrabilität: Gegeben sei eine Zentralkraft, der Einfachheit halber hier lediglich zweidimensional formuliert.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{G}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Dann ergibt sich das Potentialfeld zu

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx = \int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$$

Jeweils unter Berücksichtigung der Integrations – Konstanten

$$\phi(\vec{r}) = \sqrt{x^2+y^2} + C(y) = \sqrt{x^2+y^2} + C(x)$$

In diesem speziellen Fall sind die beiden Konstanten 0 und man erhält das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \sqrt{x^2+y^2} = |\vec{r}|$$

Gegenbeispiel

$$\vec{G}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

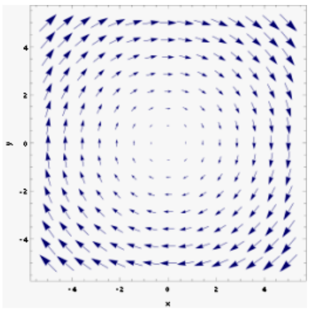
$$F(x,y) = \int -y\, dx = \int x\, dy\ ?$$

$$F(x,y) = -xy + C(y) = xy + C(x)\ ?$$

Offensichtlich gibt es kein Paar von Konstanten, sodass diese Gleichung erfüllt wäre. G ist daher kein Potentialfeld. Natürlich wäre dies auch aus der Integrabilitätsbedingung zu erkennen gewesen.

2.3. Rotation[4]

Als Rotation oder Rotor bezeichnet man in der Vektoranalysis einen bestimmten Differentialoperator, der einem Vektorfeld im dreidimensionalen euklidischen Raum mit Hilfe der Differentiation ein neues Vektorfeld zuordnet.



Die Rotation eines Strömungsfeldes gibt für jeden Ort das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich ein mitschwimmender Körper dreht („rotiert“). Dieser Zusammenhang ist namensgebend.

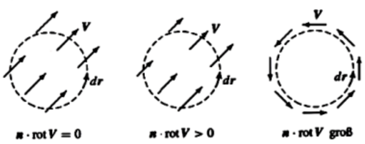
Das Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe besitzt eine konstante Rotation parallel zur Drehachse. Es muss sich aber nicht

[4] Unter Verwendung von https://de.wikipedia.org/wiki/Rotation_eines_Vektorfeldes , letzter Zugriff 05.04.2021.

immer um ein Geschwindigkeitsfeld und eine Drehbewegung handeln; beispielsweise betrifft das Induktionsgesetz die Rotation des elektrischen Feldes.

Ein Vektorfeld, dessen Rotation in einem Gebiet überall gleich null ist, nennt man wirbelfrei oder, insbesondere bei Kraftfeldern, konservativ. Umgekehrt: Ist das Gebiet einfach zusammenhängend, so ist das Vektorfeld genau dann der Gradient einer skalarwertigen Funktion, wenn die Rotation des Vektorfeldes im betrachteten Gebiet gleich null ist.

Andere Formulierung: Zur Berechnung der Rotation wird eine kleine Fläche (hier kreisförmig) mit dem Normalenvektor n betrachtet. Wenn das Vektorfeld im Bereich der Fläche konstant ist, verschwindet die Rotation. Nimmt V dagegen quer zur Feldrichtung zu, so ist n · rot V ungleich Null. Die Rotation wird maximal, wenn V parallel zum Wegelement dr des Randes der Fläche ist.



Die <u>Definition</u> der Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$Sei\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{F}(x,y,z) \to F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\ ein\ differenzierbares\ Vektorfeld.$$

Dann ergibt sich die Rotation zu

$$rot\ \overrightarrow{F(x,y,z)} := \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Schreibweise als Kreuzprodukt folgt aus der Darstellung der Rotation als formale Determinante einer Matrix. Bei der Berechnung wird an das Minus bei der y – Komponente erinnert, das aus den Entwicklungsregeln für Determinanten resultiert. In der Schreibweise rechts ist dieses bereits berücksichtigt.

<u>Beispiel:</u> Ein Geschwindigkeitsfeld sei wie folgt definiert:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seine Rotation ergibt sich damit zu

$$rot\ \overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, das Geschwindigkeitsfeld führt zu einer konstanten Rotation 2, ω = 1.

Die <u>Rotation in zwei Dimensionen</u> kann als Spezialfall mit besonderen Eigenschaften betrachtet werden: Ein Vektorfeld im zweidimensionalen, euklidischen Raum kann als Vektorfeld in drei Dimensionen aufgefasst werden, das nicht von der dritten Koordinate abhängt und dessen dritte Komponente verschwindet. Seine Rotation besteht aus einer Komponente, die senkrecht zum Vektorfeld in drei Dimensionen steht.

$$rot\,\overrightarrow{F(x,y)} := \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Man kann diese spezielle Form der Rotation auch als Skalarfeld interpretieren, da die z – Komponente nun den gleichen Wert hat wie der Betrag des Rotations – Vektors.

Die <u>Definition</u> der Rotation in Zylinderkoordinaten:

Gibt man das Vektorfeld in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) als Linearkombination

$$\vec{F}(\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z}) = \mathrm{F_r}(\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z})\widehat{e_\mathrm{r}} + \mathrm{F_\varphi}(\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z})\widehat{e_\varphi} + \mathrm{F_z}(\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z})\widehat{e_\mathrm{z}}$$

der Vektoren

$$\widehat{e_\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{y} \\ \mathrm{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{e_\mathrm{z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, die auf Einheitslänge normiert an jedem Punkt in Richtung zunehmender r,φ,z– Koordinaten zeigen, so ist die Rotation

$$rot\,\vec{F}(\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z}) = \left[\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{F_z}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathrm{F_\varphi}}{\partial \mathrm{z}}\right]\widehat{e_\mathrm{r}} + \left[\frac{\partial \mathrm{F_r}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{F_z}}{\partial \mathrm{r}}\right]\widehat{e_\varphi} + \frac{1}{\mathrm{r}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r} \cdot \mathrm{F_\varphi}\right) - \frac{\partial \mathrm{F_r}}{\partial \varphi}\right]\widehat{e_\mathrm{z}}$$

<u>Beispiel</u>: Rotation der magnetischen Feldstärke

$$H = \frac{I}{2\,\pi\,r}$$

Der Gleichstrom stromführende Leiter liege in der z – Achse. Die Feldlinien liegen daher parallel zur x-y – Ebene und in konzentrischen Kreisen um den stromdurchflossenen Leiter.

Dann erhält man die vektorielle Darstellung der magnetischen Feldstärke in Zylinderkoordinaten

$$\overrightarrow{H(r,\varphi,z)} = \frac{I}{2\,\pi\,r}\overrightarrow{e_\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I}{2\,\pi\,r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt kommt ein Trick: Wir legen die Stromdichte bezüglich der von der Feldlinie umschlossenen Fläche fest

$$I = j \cdot r^2\pi$$

Daher

$$\overrightarrow{H(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{j\ \cdot r^2\pi}{2\,\pi\,r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{j\ \cdot r}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{j}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotation

$$rot\,\vec{H}(\mathrm{r},\varphi,\mathrm{z}) = \left(\frac{j}{2}\right) \cdot \left(\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial 0}{\partial\varphi} - \frac{\partial 0}{\partial \mathrm{z}}\right]\widehat{\mathrm{e_r}} + \left[\frac{\partial 0}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial 0}{\partial \mathrm{r}}\right]\widehat{\mathrm{e}_\varphi} + \frac{1}{\mathrm{r}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}) - \frac{\partial 0}{\partial\varphi}\right]\widehat{\mathrm{e_z}}\right)$$

$$rot\,\vec{H}(\mathrm{r},\varphi,\mathrm{z}) = \left(\frac{j}{2}\right) \cdot \left(\left[\frac{1}{\mathrm{r}}0 - 0\right]\widehat{\mathrm{e_r}} + [0-0]\widehat{\mathrm{e}_\varphi} + \frac{1}{\mathrm{r}}\left[\frac{\partial(\mathrm{r}^2)}{\partial \mathrm{r}} - 0\right]\widehat{\mathrm{e_z}}\right)$$

$$rot\,\vec{H}(\mathrm{r},\varphi,\mathrm{z}) = \left(\frac{j}{2}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{r}} \cdot [2\mathrm{r}] \cdot \widehat{\mathrm{e_z}} = \left(\frac{j}{2}\right) \cdot 2 \cdot \widehat{\mathrm{e_z}}$$

$$rot\,\vec{H}(\mathrm{r},\varphi,\mathrm{z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix}$$

Was einigermaßen der Intuition entspricht. Intuitiv ist der ganze Begriff der Rotation eines Magnetfeldes, wenn man sich vorstellt, dass ein Ladungsträger im magnetischen Feld umso stärker in die Kreisbahn beschleunigt wird, je höher die lokale magnetische Feldstärke ist. Und mit dem genannten Trick, die Stromdichte auf die von der Feldlinie umschlossenen Fläche zu beziehen, wird auch diese intuitiv fassbar. Dass das bei Maxwell nicht so steht, sollte dabei nicht stören, es geht ja nur um die Vorstellung.

Jedenfalls ist das der stationäre Teil des „Erweiterten Durchflutungsgesetzes", des vierten Maxwellschen Gesetzes.

Jetzt probieren wir das in kartesischen Koordinaten. Aufpassen: An die korrekte Verwendung der z – Koordinate denken! Nur weil diese im Vektor der Feldstärke verschwindet, heißt das nicht, dass man sie weglassen darf!

$$\widehat{\mathrm{e}_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}\right) \\ \left(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dazu

$$\rho = \sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}$$

Einsetzen

$$\overrightarrow{H(\rho,\varphi,z)} = \frac{I}{2\,\pi\,\rho}\overrightarrow{e_\varphi} \rightarrow \overrightarrow{H(x,y,z)} = \frac{I}{2\,\pi\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}\begin{pmatrix} \left(\frac{-\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}\right) \\ \left(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\,\pi}\begin{pmatrix} \left(\frac{-y}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt kommt wieder der schon verwendete Trick: Wir legen die Stromdichte bezüglich der von der Feldlinie umschlossenen Fläche fest

$$I = j \cdot r^2\pi$$

$$\overrightarrow{H(x,y,z)} = \frac{j \cdot r^2 \pi}{2\pi}\begin{pmatrix}\left(\frac{-y}{r^2}\right)\\ \left(\frac{x}{r^2}\right)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{j}{2}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Rotation

$$rot\ \overrightarrow{H(x,y,z)} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\end{pmatrix} = \frac{j}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial - y}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial - y}{\partial y}\end{pmatrix} = \frac{j}{2}\begin{pmatrix}0-0\\ 0-0\\ 1-(-1)\end{pmatrix} = \frac{j}{2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ j\end{pmatrix}$$

Passt!

2.4. Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes[5] ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben (lateinisch divergere). Interpretiert man das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist die Divergenz die Quelldichte. Senken haben negative Divergenz. Ist die Divergenz überall gleich null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei. Die Divergenz ergibt sich aus dem Vektorfeld durch Anwendung eines Differentialoperators.

Divergenz ist als Wort eigentlich aus der Strahlenoptik bekannt, wird hier aber viel allgemeiner gebraucht: Unter Divergenz verstehen wir das „Netto“ der aus einem Raumgebiet kommenden Vektoren des betrachteten Vektorfeldes. Die Divergenz ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, ob das Feld dort eine Quelle/Senke besitzt und wie ergiebig diese ist.

Formal entsteht die Divergenz als Skalarprodukt des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$mit dem Vektorfeld $\vec{F}$.

$$Sei\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \to F_1, F_2, \dots, F_n\ ein\ differenzierbares\ Vektorfeld.$$

Dann ist die Divergenz von $\vec{F}$definiert als

$$div\ \vec{F} := \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Oder speziell euklidisch

$$div\ \vec{F} := \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

[5] Unter Verwendung von https://de.wikipedia.org/wiki/Divergenz_eines_Vektorfeldes letzter Zugriff 29.03.2021.

Didaktisch scheint die Notation $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ ein wenig problematisch, da damit das Produkt der partiellen Ableitung mit dem jeweiligen Vektor assoziiert wird, dabei handelt es sich doch um die Bildung der partiellen Ableitung. Hilfreich ist hingegen an dieser Notation, dass sofort sichtbar ist, dass das Ergebnis ein Skalar sein muss.

In Zylinderkoordinaten gilt für die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(\rho, \varphi, z)$

$$div\ \vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot F_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

<u>Beispiel 1:</u> Gegeben ist das Vektorfeld[6]

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dieses hat die Divergenz

$$div\ \vec{F} := \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(4)}{\partial z} = 2 + 1 + 0 = 3$$

Das betrachtete Vektorfeld hat also eine an jedem Ort konstante positive Divergenz. Das heißt, egal welcher Ort für $\vec{r}$ eingesetzt wird, jeder Ort hat eine positive Divergenz mit dem Wert 3. Jeder Ort stellt eine Quelle des Vektorfeldes dar. Das Vektorfeld 'fließt' an jedem Punkt heraus.

<u>Beispiel 2:</u> Zentralkraftfeld

$$\overrightarrow{F(x,y,z)} = C \cdot \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der Vorfaktor ist konstant

$$\vec{K} = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Komponentenweise Darstellung

$$K_x = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_y = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_z = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[6] Beispiel aus https://de.universaldenker.org/lektionen , letzter Zugriff 05.04.2021.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 1-x\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\frac{(x^2+y^2+z^2)-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$div\,\vec{K}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=0$$

Das Zentralkraftfeld ist daher quellenfrei.

Achtung: Bei der Betrachtung kugelförmiger Felder ist streng zwischen Zentralkraftfeldern und kugelförmigen Vektorfeldern zu unterscheiden!

Die Zentralkraftfelder genügen dem Bildungsgesetz

$$\overrightarrow{F(x,y,z)}=K\cdot\frac{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ihre Divergenz ist für $r > 0$ immer 0, für $r = 0$ unendlich: Abgesehen vom Zentralkraft – Zentrum hat das Feld keine weiteren Quellen oder Senken.

<u>Beispiel 3:</u> Ein kugelförmiges Vektorfeld folgt beispielsweise aus dem Bildungsgesetz

$$\overrightarrow{F(x,y,z)}=K\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

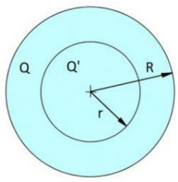
Dessen Divergenz ist 3K. Da die Kraft mit steigendem Abstand zum Ursprung größer wird, gibt es offensichtlich in jedem Raumpunkt eine weitere Quelle.

<u>Beispiel 4:</u> Das elektrische Feld einer Kugel mit homogener Ladungsdichte[7]

Die Gesamtladung sei Q, der Kugelradius R, das Kugelvolumen V, Ladungsdichte ρ.

Die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ hat gemäß dem Coulombschen Gesetz außerhalb der Kugeloberfläche die Form

$$\overrightarrow{D(\vec{r})}=\frac{Q}{4\,\pi\,r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



Das entspricht einer Punktladung im Zentrum.

Innerhalb der Kugel wird nur der jeweils eingeschlossene Ladungsteil Q´ wirksam. Aufgrund der homogenen Ladungsdichte steht der jeweils eingeschlossene Ladungsteil Q´ zur Gesamtladung im Verhältnis der Volumina

[7] Aus „Dr. Hempel / Mathematisch Grundlagen – Divergenz“, letzter Zugriff 07.04.2021.

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi\, r^3}{\frac{4}{3}\pi\, R^3}$$

Elementarumformung

$$Q' = Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

Einsetzen

$$\overrightarrow{D(\vec{r})} = \frac{Q'}{4\,\pi\, r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{Q\,\frac{r^3}{R^3}}{4\,\pi\, r^3}\cdot\vec{r} = \frac{Q}{4\,\pi\, R^3}\cdot\vec{r}$$

Fallunterscheidung: Außerhalb der Kugel verschwindet die Divergenz der elektrischen Flussdichte (Beispiel 2):

$$div\left(\frac{Q}{4\,\pi\, r^3}\cdot\vec{r}\right) = \frac{Q}{4\,\pi}\cdot div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

Im Kugelinneren gilt (Beispiel 3)

$$div\,\left(\overrightarrow{D(\vec{r})}\right) = div\,\left(\frac{Q}{4\,\pi\, R^3}\cdot\vec{r}\right) = \frac{Q}{4\,\pi\, R^3}\cdot div\,(\vec{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\, R^3}\cdot 3 = \frac{Q}{V} = \rho$$

Bei homogener Ladungsverteilung ist im Innern der Kugel jeder Punkt eine Quelle des elektrischen Feldes. Außerhalb der Kugeloberfläche ist das elektrische Feld quellen- und senkenfrei.

Das ist übrigens bereits das erste Maxwellsche Gesetz!

<u>Beispiel 5</u>: Geladene Platte

Über einer zweidimensionalen geladenen Platte, die in der x–y – Ebene liegt, entsteht eine elektrische Flussdichte

$$\left|\vec{D}\right| = \frac{Q}{A} = \sigma$$

A ist die Fläche, Q die Gesamtladung. Das erste Maxwellsche Gesetz lautet

$$div\,\vec{D} = \rho$$

Gute Frage – gilt das auch zweidimensional?

$$div\,\vec{D} = \sigma$$

Dann würde gelten

$$div\,\vec{D} = \left|\vec{D}\right|$$

Nehmen wir einmal an, die ebenen Komponenten seien irrelevant, da das Feld ausschließlich in z – Richtung entsteht, hieße das

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = 1$$

Ein elementares Problem bei der Lösung dieser einfach scheinenden DFG ist wohl, dass die Ladungsverteilung auf einer zweidimensionalen Platte zu Distributionen führt. Vermutlich führt die richtige Lösung auf eine Delta – Distribution, bei der die Ladungsdichte in z – Richtung approximiert wird. Ich verwende eine meiner Lieblings – Distributionen, hier allerdings auf f(0)=1 normiert.

$$z = e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

$$z' = -\frac{2z}{a^2} \cdot e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

Für gegenständliches Problem muss gelten

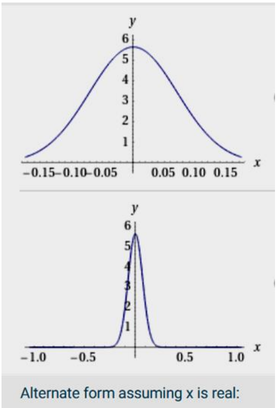
$$z' = -\frac{2z}{a^2} \cdot e^{-\frac{z^2}{a^2}} = 1$$

Für a = 0,1 gibt es (WolframAlpha) eine schöne Lösung bei ungefähr z = -0,0005

Probe

$$\frac{2 \cdot 0{,}0005}{0{,}1^2} \cdot e^{-\frac{0{,}0005^2}{0{,}1^2}} = 0{,}9975 \approx 1$$

Graph für z, a = 0,1



Nachbesserung: f(0) = 1 und f´(≈0) = 1: a = 0,01 und z = (-0,00005); f(-0,00005) = f´(-0,00005) = 0,999975

Endgültiger Vorschlag

Fallunterscheidung: Für kleine z, also auf der Platte gilt

$$\overrightarrow{D(x,y,z)} = \lim_{a \to 0} \frac{Q}{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\frac{z^2}{a^2}} \end{pmatrix}$$

Und dementsprechend

$$div\,\vec{D} = \sigma \cdot div\left(\lim_{a \to 0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\frac{z^2}{a^2}} \end{pmatrix}\right) = \sigma \cdot \left(\lim_{a \to 0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2z}{a^2} e^{-\frac{z^2}{a^2}} \end{pmatrix}\right) = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für große z, also außerhalb der Platte gilt dann

$$\overrightarrow{D(x,y,z)} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Und dementsprechend

$$div\,\vec{D} = \sigma \cdot div \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sieht doch gut aus!

<u>Beispiel 6</u>: Divergenz der magnetischen Feldstärke

Der Gleichstrom stromführende Leiter liege in der z – Achse. Die Feldlinien liegen daher parallel zur x-y – Ebene und in konzentrischen Kreisen um den stromdurchflossenen Leiter. Dann erhält man die vektorielle Darstellung der magnetischen Feldstärke in Zylinderkoordinaten

$$\overrightarrow{H(\rho,\varphi,z)} = \frac{I}{2\,\pi\,\rho}\overrightarrow{e_\varphi}$$

Wir bilden die Divergenz von Vektor H

$$div\,\overrightarrow{H(\rho,\varphi,z)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot H_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{H_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$div\,\overrightarrow{H(\rho,\varphi,z)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \cdot 0) + \frac{1}{\rho}\frac{\frac{I}{2\,\pi\,\rho}}{\partial\varphi} + \frac{\partial 0}{\partial z}$$

$$div\,\overrightarrow{H(\rho,\varphi,z)} = 0 + \frac{1}{2\,\pi\,\rho^2}\frac{I}{\partial\varphi} + 0$$

$$div\,\overrightarrow{H(\rho,\varphi,z)} = 0$$

Das war das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder, das zweite Maxwellsche Gesetz.

2.5. Der Laplace – Operator Δ

Da die Operation „Divergenz“ auf jegliche Vektorfelder anwendbar ist, lässt sie sich im Speziellen auch auf das Vektorfeld des Gradienten anwenden:

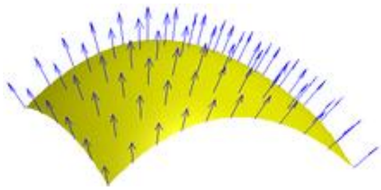
$$\Delta\,\vec{F}(\vec{r}) = div\left(grad\,\vec{F}(\vec{r})\right) = \nabla \cdot \left(\nabla\vec{F}(\vec{r})\right) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 F_n}{\partial {x_n}^2}$$

Oder euklidisch

$$\Delta\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}$$

Damit diese Operation definiert ist, muss $\vec{F}(\vec{r})$ zweimal differenzierbar sein. Dann ist der Laplace – Operator eine lineare Abbildung. Der Laplace – Operator hat ein Skalarfeld als Argument und einen Skalar als Ergebnis.

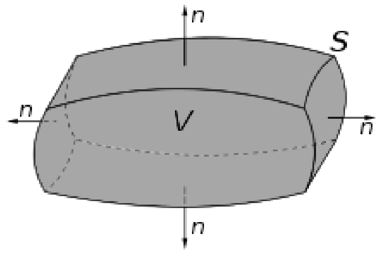
2.6. Orientierte Fläche[8]



Eine orientierte Fläche ist im mathematischen Teilgebiet der elementaren Differentialgeometrie eine orientierbare Fläche, für die festgelegt wurde, welche ihrer zwei Seiten die Außen- bzw. Innenseite ist. Die Orientierung einer Fläche wird mit der Wahl eines der zwei möglichen Flächennormalenvektoren festgelegt. Die Außenseite der Fläche ist diejenige, von der der gewählte Normalenvektor wegführt. Es gibt Flächen, die nicht orientierbar sind, wie zum Beispiel das Möbiusband.

Die Vereinbarung der Orientierung einer Fläche ist insbesondere bei der Berechnung von vektoriellen Oberflächenintegralen von großer Bedeutung, z. B. in der Elektrostatik bei der Verwendung des Gaußschen Integralsatzes. Die Orientierung bestimmt das Vorzeichen des Ergebnisses.

2.7. Gaußscher Integralsatz[9]



Der Gaußsche Integralsatz, auch Satz von Gauß – Ostrogradski oder Divergenzsatz, ist ein Ergebnis aus der Vektoranalysis. Er stellt einen Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes und dem durch das Feld vorgegebenen Fluss durch eine geschlossene Oberfläche her. Der nach Gauß benannte Integralsatz folgt als Spezialfall aus dem Satz von Stokes, der auch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verallgemeinert.

Anschauliche Bedeutung

Der Gaußsche Integralsatz findet in vielen Bereichen der Physik Anwendung, vor allem auch in der Elektrodynamik und der Fluiddynamik. Im letzteren Fall wird die Bedeutung des Satzes besonders anschaulich. Nehmen wir an, das Vektorfeld $\vec{F}$ beschreibt fließendes Wasser in einem gewissen Raumbereich. Dann beschreibt die Divergenz von $\vec{F}$gerade die Stärke von allen Quellen und Senken in einzelnen Punkten. Möchte man nun wissen, wie viel Wasser aus einem bestimmten Bereich V insgesamt herausfließt, so ist intuitiv klar, dass man folgende zwei Möglichkeiten hat:

- Man untersucht bzw. misst, wie viel Wasser durch die Oberfläche von V aus- und eintritt. Dies entspricht dem Durchfluss von senkrechten Komponenten auf der Oberfläche als Oberflächenintegral.

- Man bilanziert (misst) im Innern des dadurch begrenzten Volumens, wie viel Wasser insgesamt innerhalb von V in Senken (Löchern) verschwindet und wie viel aus Quellen (Wasserzuflüssen) hinzukommt. Man addiert also die Effekte von Quellen und Senken. Dies wird alternativ und gleichwertig dann durch das Volumenintegral über die Divergenz realisiert.

Der Gaußsche Integralsatz besagt, dass tatsächlich beide Möglichkeiten stets absolut gleichwertig zum Ziel führen. Er hat damit auch den Charakter eines Erhaltungssatzes der Energie.

Allgemeine Formulierung:

[8]Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Orientierte_Fl%C3%A4che , letzter Zugriff 06.04.2021.
[9]Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fscher_Integralsatz , letzter Zugriff 07.04.2021.

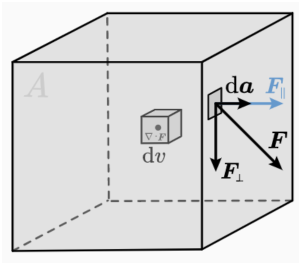
Es sei $V \subset R^n$ eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand $S=\partial V$, der Rand sei orientiert durch ein äußeres Normaleneinheitsvektorfeld $\vec{n}$. Ferner sei das Vektorfeld $\vec{F}$stetig differenzierbar auf einer offenen Menge U mit $V \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_V div\, \vec{F} d^{(n)}V = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d^{(n-1)}S$$

wobei $\vec{F} \cdot \vec{n}$ das Standardskalarprodukt der beiden Vektoren bezeichnet.

Zur Erinnerung: Der Normalenvektor einer gekrümmten Fläche in einem Punkt ist der Normalenvektor der Tangentialebene in diesem Punkt. Ein Normaleneinheitsvektor oder eine Einheitsnormale ist ein Normalenvektor der Länge 1.

Euklidische Formulierung:[10]



$$\int_V \left(div\, \vec{F}\right) dv = \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{a}$$

Wobei V das gesamte Volumen desbetrachteten Bereiches und A die gesamte löcherlose Oberfläche dieses betrachteten Bereiches ist. v und a sind die entsprechenden Volums- bzw. Flächenelemente.

Folgendes ist zu beachten: Das Volumen, über das im Gaußschen Integralsatz integriert wird, wird auch Gauß – Volumengenannt; seine Oberfläche dementsprechend auch Gauß – Oberfläche. Diese Oberfläche gehört nicht zu einem real existierenden Objekt, sondern sie ist eine gedachte Oberfläche, die als Rechenhilfe benutzt wird, um beispielsweise das elektrische Feld einer realen Kugel zu berechnen!

Noch eine zwar einsichtige, aber wichtige Formel

$$\int_V \rho\, dv = Q$$

[10]Aus https://de.universaldenker.org/lektionen/224#:~:text=Gau%C3%9F%2DIntegralsatz%20(oder%20Divergenz%2D,abgeschlossene%20Oberfl%C3%A4che%20dieses%20Volumens%20ist. , letzter Zugriff 08.04.2021.

3. Physikalische Grundlagen

3.1. Stromstärke [11]

Die Stromstärke I ist definiert als der Größenwert der Ladung Q, der sich pro Zeitintervall t durch eine (Ober-)Fläche bewegt:

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} \leftrightarrow Q = \int_t I \, dt$$

Die Stromstärke ist eine gerichtete Größe, die immer auf ein einzelnes Volumen und seinen Rand, d. h. seine Oberfläche, bezogen ist. Die Oberfläche des Volumens wird dabei als orientierte Fläche aufgefasst. Die Stromstärke ist das Maß für den Strom aus diesem Volumen hinaus, daher zeigt das Vorzeichen ihres Größenwerts die Stromrichtung an.

3.2. Stromdichte[12]

Die Stromdichte $\vec{j}$ ist eine vektorielle Größe. Ihr Betrag j, auch Intensität genannt, ist die Menge, die pro Zeitintervall und (Ober-)Flächenstück ∂A das Volumen verlässt[13], und ihre Richtung ist diejenige der mittleren Driftgeschwindigkeit der Bewegung:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Oder differentiell, also lokal

$$j = \frac{\partial I}{\partial A}$$

3.3. Kontinuitätsgleichung[14]

Eine Kontinuitätsgleichung ist eine bestimmte partielle Differentialgleichung, die zu einer **Erhaltungsgröße** gehört. Sie verknüpft die zeitliche Änderung der zu dieser Erhaltungsgröße gehörigen Dichte ρ mit der räumlichen Änderung ihrer Stromdichte $\vec{j}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0$$

Die Kontinuitätsgleichung tritt in allen Feldtheorien der Physik auf. Die erhaltenen Größen können Masse, Energie, elektrische Ladung, Wahrscheinlichkeit und einige Teilchenzahlen (Leptonenzahl, Baryonenzahl) sein, es muss sich allerdings um eine Erhaltungsgröße handeln!

Intuitiv formuliert sagt sie aus, dass sich die spezielle Erhaltungsgröße (z.B. die Ladungsdichte) nur in dem Maße verändern kann, in dem die Träger dieser Erhaltungsgröße zu- bzw. abfließen.

---

[11] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Strom_(Physik) , letzter Zugriff 06.04.2021.
[12] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Strom_(Physik) , letzter Zugriff 06.04.2021.
[13] Die immer wieder verwendete Darstellung der Stromdichte als Quotient von Strom und vektoriellem Flächenstück ist mathematisch nicht definiert und sollte unterlassen werden!
[14] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuit%C3%A4tsgleichung , letzter Zugriff 04.04.2021.

In der Elektrodynamik ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladungsdichte ρ und die elektrische Stromdichte $\vec{j}$.

3.4. Ladungsdichte[15]

Die elektrische Ladungsdichte ist eine physikalische Größe aus der Elektrodynamik, die eine Ladungsverteilung beschreibt. Da es sowohl positive als auch negative Ladungen gibt, sind für die Ladungsdichte ebenfalls sowohl positive als auch negative Werte möglich. Die elektrische Ladungsdichte ist ein Skalar. Nicht mit der Ladungsdichte zu verwechseln ist außerdem die Ladungsträgerdichte, also die Anzahl der Protonen, Elektronen usw. pro Raum-, Flächen- oder Längeneinheit.

Da Ladungen im Raum, an Oberflächen oder entlang eines dünnen Drahtes verteilt sein können, kann die Ladungsdichte durch folgende Größen beschrieben werden:

- Raumladungsdichte: Die Ladung Q pro Volumen V, übliches Symbol ρ (rho)

$$\rho = \frac{dQ}{dV}\left[\frac{As}{m^3}\right]$$

- Oberflächenladungsdichte: Die Ladung Q pro Fläche A, übliches Symbol σ (sigma)

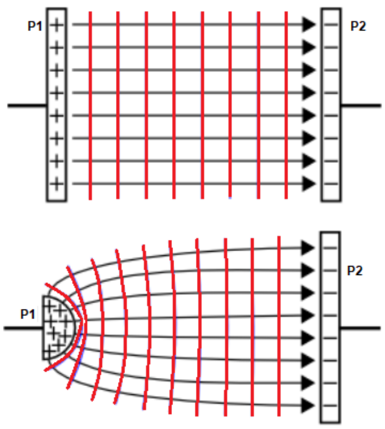
$$\sigma = \frac{dQ}{dA}\left[\frac{As}{m^2}\right]$$

- Linienladungsdichte: Die Ladung Q pro Länge l, übliches Symbol λ (lambda).

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}\left[\frac{As}{m}\right]$$

3.5. Elektrische Flussdichte[16]

Die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ – auch elektrische Erregung, dielektrische Verschiebung, Verschiebungsdichte oder Verschiebungsflussdichte genannt – beschreibt die Dichte der elektrischen Feldlinien in Bezug auf eine Fläche. Sie ist eine physikalische Größe der Elektrostatik und Elektrodynamik und gemäß dem internationalen Einheitensystem in der Einheit Coulomb pro Quadratmeter (C/m^2) angegeben.



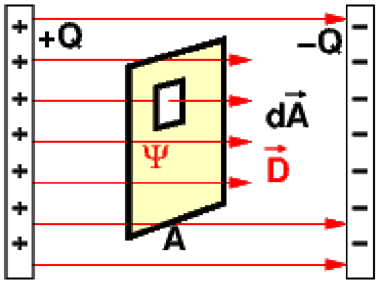
Die elektrische Flussdichte ist eine vektorielle, also gerichtete Größe – im Gegensatz zur skalaren Flächenladungsdichte σ, die in derselben Einheit angegeben wird.

Herrscht zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 im Raum eine elektrische Spannung, so spricht man von unterschiedlichen Potentialen in P_1 und P_2. Dazwischen liegen Äquipotentialflächen, d. h. geschlossene Flächen mit jeweils konstantem Potential. Im rechten Winkel zu diesen Äquipotentialflächen (in der Graphik rot) stehen die elektrischen

[15] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Ladungsdichte , letzter Zugriff 06.04.2021.
[16] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische_Flussdichte , letzter Zugriff 06.04.2021.

Flusslinien. Entsprechend der Definition der elektrischen Feldstärke sind positive Ladungen die Quelle des elektrischen Flusses, negative Ladungen die Senke.

Zum intuitiven Verständnis der elektrischen Flussdichte diene das Bild, dass aus jedem Ladungsträger eine Feldlinie austritt. Da die Feldlinien die gleiche Polarität aufweisen, wie die Ladungsträger die sie hervorgebracht haben, können Feldlinien einander niemals kreuzen. In der unmittelbaren Nähe der geladenen Oberfläche ist damit die Flächenladungsdichte σ betragsmäßig gleich der elektrischen Flussdichte $|\vec{D}|$. In homogenen Feldern (z.B. im Plattenkondensator) bleibt das über das gesamte Feld so, in inhomogenen Feldern (z.B. um geladene Konduktorkugeln oder im Zylinderkondensator) nicht.



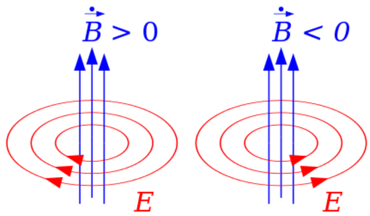
Die Gesamtheit aller Feldlinien, die im rechten Winkel durch eine Äquipotentialfläche durchtreten, bezeichnet man als elektrischen Fluss ψ. Der elektrische Fluss ψ, der durch eine beliebige Fläche A hindurchtritt, ist daher gleich dem Flächenintegral der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$. Dabei trägt nur jener Anteil des elektrischen Flusses bei, der normal zur Fläche A steht. Mathematisch wird dies ausgedrückt mittels Vektoren und durch die Operation des Skalarproduktes (inneren Produkts):

$$\psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist somit gleich der von dieser Fläche eingeschlossenen elektrischen Ladung:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \cdot dV = Q$$

3.6. Lenzsche Regel[17]



Nach der Lenz'schen Regel wird durch eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife eine Spannung induziert, so dass der dadurch fließende Strom ein Magnetfeld erzeugt, welches der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt, ggf. verbunden mit mechanischen Kraftwirkungen (Lorentzkraft).

So gesehen ist die Lenz'sche Regel eine Folgerung des allgemeinen Faraday'schen Induktionsgesetzes:

$$\oint_{\partial A} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Die elektromagnetische Induktion ist eines der grundlegenden Phänomene der Elektrophysik. Das Induktionsgesetz stellt einen Zusammenhang zwischen Magnetfeldern und elektrischen Spannungen her und ist insbesondere zum Verständnis elektrischer Maschinen notwendig.

Die Lenz'sche Regel besagt, dass der induzierte Strom eine Änderung des magnetischen Flusses zu verhindern sucht. Die Änderung des magnetischen Flusses ist dem Induktionsgesetz (einem

[17] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel , letzter Zugriff 13.04.2021.

Teil der Maxwell – Gleichungen) entsprechend die Ursache für die Entstehung des Induktionsstromes.

Die Lenz'sche Regel steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Energieerhaltungssatz: Die Energie für den Aufbau des elektrischen Feldes stammt aus dem Magnetfeld. Ihre physikalische Aussage entspricht der des Minuszeichens innerhalb des Induktionsgesetzes, das in integraler Form wie folgt lautet:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Auf der linken Seite steht die induzierte Spannung (Integration der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$über einen geschlossenen Weg ∂A), auf der rechten die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses (Integration des Skalarproduktes von magnetischer Flussdichte $\vec{B}$ und dem Flächennormalenvektor über die vom Weg ∂A umschlossene Fläche A).

Kurzfassung: Die Induktionsspannung wirkt immer ihrer Ursache, der Änderung des magnetischen Flusses, entgegen.

3.7. Ampèresches Gesetz

Das Ampèresche Gesetz (Durchflutungssatz, Durchflutungsgesetz) ist ein Gesetz der Elektrodynamik und eine der Maxwellschen Gleichungen. Es wurde von André – Marie Ampère entdeckt und bildet für den Magnetismus die Analogie zum Induktionsgesetz.

Die differentiellen Formen lauten

$$rot\ \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$rot\ \vec{H} = \vec{J}$$

Das Gesetz setzt das Kurvenintegral des magnetischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve in Beziehung zum Strom, der durch die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche fließt.

Die integrale Form des Gesetzes lautet (Annahme konstanter Stromdichte ist nicht erforderlich):

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\ I$$

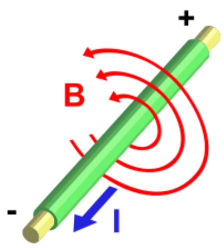
bzw.

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

Dabei ist $\vec{s}$ ein infinitesimales, orientiertes Teilstück der geschlossenen Kurve S, und I der innerhalb von S fließende Strom.

Die integrale Formulierung lässt sich folgendermaßen interpretieren:

Um einen beliebig geformten Leiter – sei es ein Draht, eine Metallplatte, eine Spule, oder auch nur ein sehr kleines Stück eines größeren Leiters – legt man gedanklich einen (Mess-)Rahmen. Dieser Rahmen kann von beliebiger Form sein, z. B. ein Rechteck oder ein Kreis von beliebiger Größe. Wenn durch den Leiter ein Strom fließt, verursacht dies ein Magnetfeld. Wenn man am Rahmen entlanggeht und für jedes kleine Stück des Rahmens die Komponente des Magnetfelds in Richtung des kleinen Rahmenstücks addiert, dann erhält man, wenn der Rahmen umrundet ist, eine Summe, die dem Strom durch den Leiter proportional ist.



Magnetfeld der Spule

Bei direkter Anwendung des ampèreschen Gesetzes zur Bestimmung eines Magnetfelds erhält man meistens nur Lösungen für vereinfachte Fälle, zum Beispiel, wenn man annimmt, dass das Magnetfeld einer Spule überall entlang oder entgegen der Achse der Spule und innen homogen ist, was aber nur für die unendlich lange Spule zutrifft.

Man habe eine solche Spule mit *n* Windungen pro Strecke *l*. Man legt einen rechteckigen Rahmen durch die Spule, dessen obere Seite mit der Länge *a* in der Spule liegt, und dessen rechte und linke Seite unendlich lang sind. Zu diesen Seiten steht nach Annahme das Magnetfeld senkrecht, die Komponente in Richtung des Rahmens ist also Null. Die untere Seite ist unendlich weit weg, wo das Magnetfeld Null sein muss. Es bleibt also vom Integral nur die obere Seite, wo die Komponente des Magnetfelds genau parallel ist. Also gilt:

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = a\, \vec{B}(\vec{r}) = a\, \mu_0\, I \frac{n}{l}$$

Woraus folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\, I \frac{n}{l}$$

Oder ohne Bezug auf ein Material

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I \cdot n}{l}$$

womit man den Betrag des Magnetfelds in der Spule bestimmt hat. Dies ist die in der Elektrotechnik praktisch verwendete Formel. Man beachte, dass wie so oft in der Physik die Integrale nicht ausgerechnet, sondern deren Wert durch Überlegung bestimmt werden.

3.8. Verschiebungsstrom[18]

Der Verschiebungsstrom ist der Teil des elektrischen Stromes, der durch die zeitliche Änderung des elektrischen Flusses gegeben ist. Er wurde von James Clerk Maxwell als nötiger Zusatzterm im ampèreschen Gesetz erkannt.

Der elektrische Strom setzt sich aus zwei additiven Komponenten zusammen:

- Der Konvektionsstrom I_l beruht auf gemeinsamem elektrischen und Stoffstrom, ohne dass die Ladungsträger, z. B. Leitungselektronen oder Ionen, durch eine Rückstellkraft an eine Ruhelage gebunden sind. Oft ist der Antrieb für die Bewegung ein elektrisches Feld, siehe elektrische Leitfähigkeit, siehe aber auch Diffusionsstrom, Thermoelektrizität und Van – de – Graaff –Generator. Umgangssprachlich bedeutet elektrischer Strom nur diese Komponente.
- Der Verschiebungsstrom I_v entspricht Änderungen der elektrischen Flussdichte, die aus zwei Beiträgen besteht: der Bildung oder Ausrichtung elektrischer Dipole in Materie, siehe

[18] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Verschiebungsstrom , letzter Zugriff 13.04.2021.

dielektrische Polarisation, und der elektrischen Feldstärke multipliziert mit der elektrischen Feldkonstanten.

Mathematisch lässt sich der totale Strom I als Summe aus beiden Komponenten ausdrücken als:

$$I = I_l + I_v$$

Dadurch wird eine begriffliche Erweiterung des ampèreschen Durchflutungsgesetzes nötig, die den gesamten elektrischen Strom in der Form

$$I = \int_A \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}$$

ausdrückt.

Dabei ist der erste Summand der Leitungsstrom, der von der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ ausgelöst wird. Die dabei auftretende Konstante σ ist die elektrische Leitfähigkeit des Mediums (Leiters), in dem der Leitungsstrom fließt.

Der zweite Summand ist der Verschiebungsstrom mit der zeitlichen Änderungsrate der Feldstärke und der Permittivität ε. Die Permittivität ist das Maß der im Medium möglichen Polarisation. Verschiebungsstrom ist wichtig in Materialien mit hoher Permittivität und geringer Leitfähigkeit, also Nichtleitern (Isolatoren). Ein Sonderfall mit nicht vorhandener Leitfähigkeit, aber schwach vorhandener Permittivität ε_0 (Vakuum): In ihm fließt (abgesehen von freien Ladungsträgern infolge eventueller hoher Feldstärken) nur Verschiebungsstrom.

Bei zeitlichen harmonischen (sinusförmigen) Änderungen ist im gleichen Medium der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom immer um 90° (π/2) phasenverschoben. Hingegen sind in einem Stromkreis, der durch einen Isolator unterbrochen ist, der im Isolator dominierende Verschiebungsstrom und der im elektrischen Leiter dominierende Leitungsstrom miteinander in Phase, und die beiden Ströme sind betragsmäßig praktisch gleich. Dieser technisch wichtige Fall tritt beim Kondensator im sinusförmigen Wechselstromkreis in Erscheinung: Der Strom in den Zuleitungsdrähten und den Kondensatorplatten (elektrischer Leiter) wird durch den Leitungsstrom getragen, der Strom durch das Dielektrikum (Isolator) zwischen den Kondensatorplatten primär durch den Verschiebungsstrom. Ohne Verschiebungsstrom wäre keine Stromleitung durch den Kondensator möglich – wenngleich diese Stromleitung durch den Verschiebungsstrom wegen der nötigen zeitlichen Änderungsrate beim elektrischen Fluss immer auf Wechselströme (zeitliche Änderung) limitiert ist.

Der Verschiebungsstrom, die Änderung des elektrischen Flusses durch eine Oberfläche A, ist definiert durch

$$I_v = \frac{d\psi}{dt}$$

Mit dem bereits bekannten Zusammenhang zwischen elektrischem Fluss und elektrischer Durchflutung

$$\psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

4. Die mikroskopischen Maxwell – Gleichungen

Diese einfache Version vernachlässigt den Einfluss der Materie auf die Felder und ist daher für den Einstieg besonders gut geeignet.

Name:	Gaußsches Gesetz
SI – Formulierungen:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $div\ \vec{D} = \rho$
Physikalische Bedeutung:	Elektrische Feldlinien divergieren voneinander unter Anwesenheit elektrischer Ladung; die Ladung ist die Quelle des elektrischen Feldes.

Name:	Gaußsches Gesetz für Magnetfelder
SI – Formulierungen:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $div\ \vec{B} = 0$ $div\ \vec{H} = 0$
Physikalische Bedeutung:	Magnetische Feldlinien divergieren nicht, das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei; es gibt keine magnetischen Monopole.

Name:	Induktionsgesetz
SI – Formulierungen:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{t}}$ $rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{t}}$
Physikalische Bedeutung:	Änderungen der magnetischen Flussdichte führen zu einem elektrischen Wirbelfeld. Das Minuszeichen schlägt sich in der Lenzschen Regel nieder.

Name:	Erweitertes Durchflutungsgesetz
SI – Formulierungen:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{t}}$ $rot\ \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{t}}$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial\, t}$$

Physikalische Bedeutung: Elektrische Ströme, sowohl Leitungsstrom als auch Verschiebungsstrom führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

Das war´s auch schon.

5. Die Arbeit im Magnetfeld

5.1. Die Kraft im Magnetfeld

Eine bewegte Ladung erfährt im Magnetfeld eine Kraft, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zur Feldstärke des Magnetfeldes gerichtet ist. Die Kraft nennt man Lorentz – Kraft. Da Kraft und Bewegungsrichtung immer senkrecht aufeinander stehen, wird durch diese Kraft keine Arbeit verrichtet.

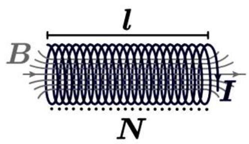
Die Lorentz – Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit der Ladung v, zur Ladungsmenge Q und zur magnetischen Feldstärke B. Die Richtung der Lorentz – Kraft wird durch das Kreuzprodukt ausgedrückt:

$$\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Beachte: die Coulomb – Kraft ist nicht von der Geschwindigkeit abhängig!

5.2. Die Energie des Magnetfeldes[19]:

Die Herleitung beginnt mit der Berechnung des B – Feldes einer Spule. Der Betrag des Magnetfeldes im Inneren einer langen Spule ist gegeben durch:



$$B = \mu_0 \frac{I\,N}{l}$$

Hierbei ist N die Anzahl der Spulenwindungen, l die Spulenlänge und μ_0 die magnetische Feldkonstante. Und da der Schaltkreis nicht abgeschaltet wurde, ist der Strom I eine zeitabhängige Größe (und damit auch das B – Feld).

Der magnetische Fluss Φ_m durch die Spulenquerschnittsfläche A hindurch, beträgt daher

$$\Phi_m = B \cdot A = \mu_0 \frac{I\,N}{l} \cdot A$$

Das Induktionsgesetz, einmal ausgedrückt mit L und einmal ausgedrückt mit der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses, lautet:

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$U_{ind} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

[19] Aus https://de.universaldenker.org/argumentationen/336 , letzter Zugriff 15.04.2021.

N kommt hier aufgrund von N Querschnittsflächen jeder Spulenwindung vor, durch die der magnetische Fluss geht.

Gleichsetzen ergibt

$$N \frac{d\Phi_m}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{L}{N} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Die Ableitung des magnetischen Flusses nach der Zeit ergibt

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot A \cdot \frac{dI}{dt}$$

Vergleich

$$\frac{L}{N} = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot A$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot A$$

Wiederholung

$$B = \mu_0 \frac{I\ N}{l}$$

Strom explizit machen

$$\frac{B\ l}{\mu_0\ N} = I$$

Ein Spezialfall ist der Energiegehalt einer Spule. Dieser lässt sich durch den Energiebedarf bei der Aufladung analog zum Kondensator bestimmen. Als Wert ergibt sich

$$W = L \cdot \frac{I^2}{2}$$

Einsetzen

$$W = L \cdot \frac{\left(\frac{B\ l}{\mu_0\ N}\right)^2}{2}$$

Einsetzen

$$W = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot A \cdot \frac{\left(\frac{B\ l}{\mu_0\ N}\right)^2}{2}$$

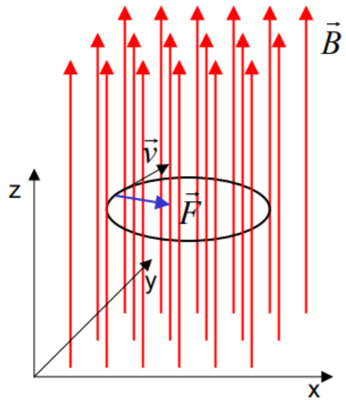
$$W = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot A \cdot \frac{\frac{B^2\ l^2}{{\mu_0}^2\ N^2}}{2}$$

$$W = A \cdot l \cdot \frac{B^2}{2\ \mu_0}$$

$A\,l$ ist aber das Volumen V, somit ergibt sich der Energiegehalt des magnetischen Feldes zu

$$W = V\ \frac{B^2}{2\ \mu_0}\ [Ws]$$

5.3. Die Bewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld



Als Spezialfall betrachten wir eine Ladung im homogenen Magnetfeld. Eine Ladung im homogenen Magnetfeld bewegt sich auf einer Kreisbahn. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt konstant, da aus dem Magnetfeld keine Energie übertragen wird. Die Lorentz – Kraft verursacht die Radialbeschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Im rechten Winkel vereinfacht sich die Darstellung der Lorentz – Kraft zu

$$F = Q\ \cdot v\ \cdot B$$

Die Radialbeschleunigung (auch Zentripetalbeschleunigung)[20] ergibt sich skalar, da Tangentialgeschwindigkeit und Radius – Vektor aufeinander normal stehen zu

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Zusammengefasst

$$Q\ \cdot v\ \cdot B = m\ \cdot \frac{v^2}{r}$$

Vereinfacht

$$r = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B}$$

6. Von den Maxwell – Gleichungen zu den Wellengleichungen

6.1. Die Wellengleichung

Die Wellengleichung[21], auch D'Alembert – Gleichung nach Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, bestimmt die Ausbreitung von Wellen wie etwa Schall oder Licht. Sie zählt zu den hyperbolischen Differentialgleichungen, das ist eine spezielle Ausprägung partieller Differentialgleichungen.

Wenn das Medium oder Vakuum die Welle nur durchleitet und nicht selbst Wellen erzeugt, handelt es sich genauer um die homogene Wellengleichung, die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

[20] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Zentripetalkraft , letzter Zugriff 15.04.2021.
[21] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Wellengleichung , letzter Zugriff 14.04.2021.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = 0$$

für eine reelle Funktion $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ der Raumzeit. Hierbei ist n die Dimension des Raumes. Der Parameter c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, also bei Schall (im homogenen und isotropen Medium) die Schallgeschwindigkeit und bei Licht die Lichtgeschwindigkeit.

Der Differentialoperator der Wellengleichung wird D'Alembert – Operator genannt und mit dem Formelzeichen □ (gesprochen Box) notiert.

$$\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}$$

Die Lösungen der Wellengleichung heißen Wellen. Weil die Gleichung linear ist, überlagern sich Wellen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Da die Koeffizienten der Wellengleichung nicht vom Ort oder der Zeit abhängen, verhalten sich Wellen unabhängig davon, wo oder wann und in welche Richtung man sie anregt. Verschobene, verspätete oder gedrehte Wellen sind ebenfalls Lösungen der Wellengleichung.

6.2. Die Wellengleichungen für das E – Feld und das B – Feld[22]

Das Ziel ist es, aus den Maxwell – Gleichungen im ladungsfreien Raum die Wellengleichung für das elektrische Feld E und das magnetische Feld B herzuleiten. Der Ausgang sind die vier Maxwell – Gleichungen der Elektrodynamik im ladungsfreien ($\rho = 0$) und stromfreien ($j = 0$) Raum:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \text{Eq1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{Eq2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{t}} \qquad \text{Eq3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{t}} \qquad \text{Eq4}$$

Eine weitere Zutat, die für die Herleitung der beiden Wellengleichungen notwendig ist, ist der folgende Zusammenhang für die Rotation der Rotation des Vektorfeldes (doppeltes Kreuzprodukt):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F} \qquad \text{Eq5}$$

Der erste Summand ist hierbei der Gradient der Divergenz von F und der zweite Summand ist die Divergenz des Gradienten von F.

[22] Aus https://de.universaldenker.org/argumentationen/334 , letzter Zugriff 15.04.2021. Dasselbe steht auch in https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle .

6.3. Zuerst die Wellengleichung für das elektrische Feld

Wende auf beiden Seiten von Eq3 den Rotationsoperator "∇×" an:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{t}}\right)$$

Eq6

Die Zeitableitung zusammen mit dem Minuszeichen darf vor den Nabla – Operator (Ortsableitung) vorgezogen werden, da der Nabla – Operator nicht von der Zeit abhängt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$

Eq7

Dadurch kann jetzt die Rotation von B mithilfe Maxwell – Gleichung Eq4 ersetzt werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{t}}\right)$$

Eq8

Die Zeitableitung darf hinter die magnetische und elektrische Feldkonstanten geschrieben werden. Zwei Zeitableitungen hintereinander können zur zweiten Zeitableitung kompakt zusammengefasst werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Eq9

Eine Seite der Wellengleichung ist hergeleitet, nämlich die zweite Zeitableitung des elektrischen Feldes. Jetzt muss nur noch die linke Seite in die richtige Form, wie bei einer Wellengleichung, umgeschrieben werden. Dort muss die zweite Ortsableitung des elektrischen Feldes stehen. Dazu wird der Zusammenhang Eq5 benutzt, um das doppelte Kreuzprodukt zu ersetzen:

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Eq10

Auf der linken Seite von Eq10 kommt die Divergenz $\nabla \cdot \mathrm{E}$ des elektrischen Feldes vor. Das ist genau die Maxwell – Gleichung Eq1. Und diese besagt, dass die Divergenz des elektrischen Feldes im ladungsfreien Raum stets Null ist. Damit vereinfacht sich Eq10 zu:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Eq11

Das Minuszeichen auf beiden Seiten kürzt sich weg. Fertig ist die vektorielle Wellengleichung für das E – Feld

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Eq12

Mit „vektoriell“ ist gemeint, dass Eq12 eigentlich drei Wellengleichungen beinhaltet, da das elektrische Feld ein Vektorfeld mit drei Komponenten ist:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Hierbei ist beispielsweise die Wellengleichung für die erste Komponente E_x:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Eq13

6.4. Die Wellengleichung für das magnetische Feld

Um die vektorielle Wellengleichung für das magnetische Feld herzuleiten, wird analog wie beim elektrischen Feld vorgegangen. Jedoch mit einem einzigen Unterschied. Der Rotationsoperator "∇×" wird nicht auf beiden Seiten von Eq3, sondern auf beiden Seiten von Eq4 gebildet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Eq14

Ziehe nun die Zeitableitung und die beiden Konstanten auf der rechten Seite vor den Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)$$

Eq15

Nun wird Maxwell – Gleichung Eq3 in das Kreuzprodukt auf der rechten Seite eingesetzt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Eq16

Die Zeitableitung wird zusammengefasst und das doppelte Kreuzprodukt auf der linken Seite mittels Eq5 ersetzt:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{B} \right) - \nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Eq17

Die Divergenz $\nabla \cdot B$ ist nach der Maxwell – Gleichung Eq2 Null. Minuszeichen kürzen. Fertig ist die vektorielle Wellengleichung für das B – Feld

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Eq18

6.5. Der Vergleich mit der allgemeinen Wellengleichung

In den Wellengleichungen für elektromagnetische Felder steckt noch eine weitere wichtige Information, die beim Vergleich mit der allgemeinen Form der Wellengleichung offenbart werden kann:

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Eq19

In dieser steckt nämlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Der Vergleich von Eq19 mit den Wellengleichungen für das E – Feld bzw. B – Feld ergibt den magischen Zusammenhang zwischen der Lichtgeschwindigkeit und den elektromagnetischen Feldkonstanten

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

Eq20

6.6. Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen[23]

Mit Hilfe der Maxwellgleichungen lassen sich aus der Wellengleichung noch weitere Schlüsse ziehen. Betrachten wir eine allgemeine ebene Welle für das elektrische Feld

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\, f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)$$

Die Variablen bedeuten dabei

$\overrightarrow{E_0}$ die konstante Amplitude
f eine beliebige C^2 – Funktion
$\hat{k}$ ein Einheitsvektor, der in Propagationsrichtung zeigt, und
$\vec{x}$ ein Ortsvektor.

Zunächst sieht man durch Einsetzen in die Wellengleichung, dass

$$f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)$$

die Wellengleichung erfüllt, dass also

$$\Delta\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Damit $\vec{E}$ nun eine elektromagnetische Welle beschreibt, muss es aber nicht nur die Wellengleichung erfüllen, sondern auch die Maxwellgleichungen. Das bedeutet

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \hat{k} \cdot \overrightarrow{E_0}\, \frac{\partial f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)}{\partial\left(\hat{k} \cdot \vec{x}\right)} = 0$$

Daraus folgt

$$\vec{E} \cdot \hat{k} = 0$$

[23] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle , letzter Zugriff 15.04.2021.

Das elektrische Feld steht also stets senkrecht zur Propagationsrichtung, es handelt sich also um eine Transversalwelle. Einsetzen von $\vec{E}$ in eine weitere Maxwellgleichung ergibt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{k} \times \overrightarrow{E_0}\, \frac{\partial f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)}{\partial\left(\hat{k} \cdot \vec{x}\right)} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{t}}$$

Und da

$$-\frac{\partial f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)}{\partial\left(\hat{k} \cdot \vec{x}\right)} = \frac{\partial f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)}{\partial (c\, t)}$$

ist, folgt daraus

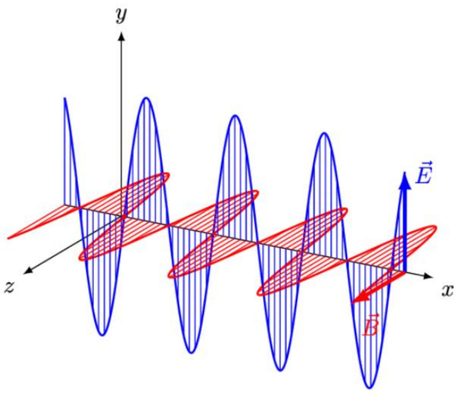
$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$$

Die magnetische Flussdichte in der elektromagnetischen Welle steht also ebenfalls senkrecht zur Propagationsrichtung und auch senkrecht zum elektrischen Feld. Außerdem stehen ihre Amplituden in einem festen Verhältnis. Ihr Quotient ist die Lichtgeschwindigkeit c

$$\frac{E_0}{B_0} = c$$

In natürlichen Einheiten (c = 1) haben beide Amplituden den gleichen Wert.

Probieren wir das einmal aus:



Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle im Vakuum, ohne Ladungen oder Magnetfelder. Die monochromatische Welle mit Wellenlänge λ breitet sich in x – Richtung aus. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ (in blau) in y – Richtung und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ (in rot) in z – Richtung stehen zueinander und zur Ausbreitungsrichtung im rechten Winkel und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Ansatz:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\, f\left(\hat{k} \cdot \vec{x} - c\, t\right)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot sin\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c\, t\right)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ sin(x - c\, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufteilen

$$E_x = 0$$

$$E_y = \left(sin(x - c\ t)\right)$$

$$E_z = 0$$

Einsetzen in die drei Wellengleichungen

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial \mathrm{z}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial \mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial \mathrm{z}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial \mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \mathrm{z}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Offensichtlich verschwinden Ex und Ez Komponenten

$$\frac{\partial^2\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial \mathrm{z}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial \mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\partial^2\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial \mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\partial\left(cos(c\ t - x)\right)}{\partial \mathrm{x}} = \frac{-c}{c^2}\frac{\partial\left(cos(c\ t - x)\right)}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\frac{\partial\left(cos(c\ t - x)\right)}{\partial \mathrm{x}} = \frac{-c}{c^2}\frac{\partial\left(cos(c\ t - x)\right)}{\partial \mathrm{t}}$$

$$sin(c\ t - x) = \left(\frac{-1}{c}\right)(-c) sin(c\ t - x)$$

Was offensichtlich erfüllt ist.

Maxwell 1

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Einsetzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial\left(sin(x - c\ t)\right)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0$$

Was ebenso offensichtlich erfüllt ist.

Aufgrund des gleichartigen Aufbaus sind die Gleichungen für die magnetische Flussdichte wohl auch erfüllt.

Zum Abschluss testweise ein falscher Ansatz, eine Longitudinalwelle

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot sin\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c\ t\right)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot sin\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c\ t\right)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(x - c\ t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufteilen

$$E_x = \big(sin(x - c\ t)\big)$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = 0$$

Einsetzen in die drei Wellengleichungen

Offensichtlich verschwinden Ey und Ez Komponenten

$$\frac{\partial^2\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial \mathrm{z}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial \mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\partial^2\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial \mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\partial\big(cos(c\ t - x)\big)}{\partial \mathrm{x}} = \frac{-c}{c^2}\frac{\partial\big(cos(c\ t - x)\big)}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\frac{\partial\big(cos(c\ t - x)\big)}{\partial \mathrm{x}} = \frac{-c}{c^2}\frac{\partial\big(cos(c\ t - x)\big)}{\partial \mathrm{t}}$$

$$sin(c\ t - x) = \left(\frac{-1}{c}\right)(-c)sin(c\ t - x)$$

Die Wellengleichung ist offensichtlich erfüllt.

Maxwell 1

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Einsetzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial\big(sin(x - c\ t)\big)}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = \big(cos(c\ t - x)\big) \neq 0$$

Was ebenso offensichtlich nicht erfüllt ist. Eine longitudinale Lichtwelle verletzt also Maxwell 1.