Die Umrechnung der Kepler – Gesetze zu den Newton – Gesetzen und umgekehrt

Wolfgang Tomischko, Technische Universität Wien
Institut für chemische Technologien und Analytik
Getreidemarkt 9 / 164
1060 Wien

Abstract

Die Umrechnung der Kepler – Gesetze zu den Newton – Gesetzen und umgekehrt ist eine Pionierleistung der frühen Physik des 17. Jahrhunderts. Heutzutage geschieht dies üblicherweise über die Erhaltung von Drehimpuls und Energie[1]. Der Energieerhaltungssatz war allerdings im 17. Jahrhundert nicht bekannt[2]. Abgesehen davon drücken sich viele Texte um die Berechnung der konkreten Positionen und beschränken sich auf die Berechnung der Bahnkurve. In dieser Schrift wird versucht, die Umrechnung mit den zeitgenössischen Methoden, allerdings in heutiger Schreibweise, durchzuführen.

Zusätzliche Kapitel entstanden nach Vorschlägen aus dem Freundeskreis, um auch die in der Literatur selten ausgearbeiteten Fragen der mathematischen Verbindungen zwischen Bahnkurve und Bahngeschwindigkeit Schritt für Schritt zu erklären.

Da dieser Aufsatz keinen Anspruch auf Veröffentlichung hat, und über weite Strecken aus bestehender Literatur entnommen ist, bleibt die Symbolik uneinheitlich. Daher ist ein wenig Aufmerksamkeit geboten, um nicht verwirrt zu werden.

1. Die Newtonschen Gesetze

In heutiger Formulierung lauten die Newtonschen Gesetze[3]:

1) Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

2) Die Kraft ist gleich der Masse mal der Beschleunigung.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

3) Kraft gleich Gegenkraft: Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht immer mit einer gleich großen, aber entgegen gerichteten Kraft von Körper B auf Körper A einher.

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{A} \to \mathrm{B}}} = -\overrightarrow{F_{\mathrm{B} \to \mathrm{A}}}$$

4) Superpositionsprinzip: Verschiedene Kräfte, die alle einzeln auf den gleichen Körper wirken, bewirken dasselbe, als würde lediglich ihre Summe auf den Körper wirken.[4]

---

[1] Z.B. Demtröder, Experimentalphysik 1, 5. Auflage, S.70ff
[2] Soweit heute bekannt ist, wurde der Energieerhaltungssatz zuerst vom Heilbronner Arzt Julius Robert von Mayer (1814 – 1878) im Jahr 1842 formuliert. Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Energieerhaltungssatz , letzter Zugriff 04.09.2019.
[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsche_Gesetze , letzter Zugriff 02.09.2019.
[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Superposition_(Physik) , letzter Zugriff 02.09.2019.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

5) Für die Himmelmechanik zentral ist dazu das Gravitationsgesetz[5]:

Der Betrag der Kraft zwischen zwei Massepunkten m_1 und m_2 im Abstand r lautet in vektorieller Schreibweise

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|r|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{r_{12}}}{|r|} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \overrightarrow{r_{12}}}{|r|^3}$$

In dieser Schreibweise ist besonders gut erkennbar, dass die Gravitationskraft eine Zentralkraft ist.

2. Die Keplerschen – Gesetze[6]

1) Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.

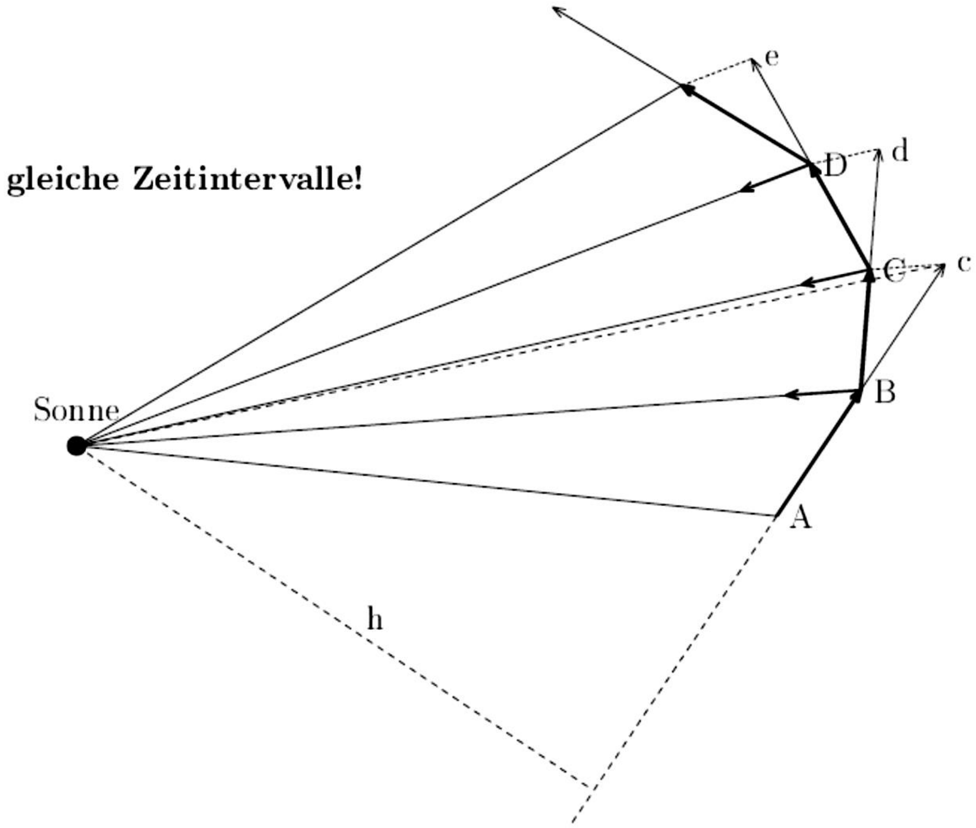
2) Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

Dieses Gesetz lässt sich besonders anschaulich geometrisch aus dem Gravitationsgesetz ableiten, wobei die elementare Argumentation darauf beruht, dass die Gravitationskraft eine Zentralkraft ist[7]. Daher gilt diese Argumentation unverändert für alle Kraftfelder einer Zentralkraft.

3) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse der Ellipse.

[5]https://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsches_Gravitationsgesetz , letzter Zugriff 02.09.2019.
[6]https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze , letzter Zugriff 03.09.2019.
[7]Dieser Text und die Grafik stammen zum großen Teil aus dem Vorlesungsskriptum WS2002/2003 von Udo Backhaus. Dieser Autor beruft sich dabei wiederum auf die Argumentation von R. Feynman, publiziert in dem Buch „Goodstein&Goodstein: Feynmans verschollene Vorlesung: Die Bewegung der Planeten um die Sonne, Piper, München 1998“. Textänderungen aus didaktischen Überlegungen.

3. Die Ableitung des 2. Keplerschen – Gesetzes aus den Newton – Gesetzen



Im ersten mathematischen Schritt wird mit diskreten Zeiten und entsprechenden Kraftwirkungen gerechnet, sodass die Bahnellipse durch Dreiecke approximiert wird: Ein Planet, der sich in der Zeit Δt mit konstanter Geschwindigkeit von Punkt A zum Punkt B bewegt, würde sich, ohne von der Sonne angezogen zu werden, im nächsten Zeitintervall aufgrund seiner Trägheit (1. Newton´sches Gesetz) von B nach c bewegen. Durch die Wechselwirkung mit der Sonne erhält er jedoch in B eine Zusatzbewegung in Richtung auf die Sonne. Seine tatsächliche Bewegung im zweiten Zeitintervall ist die Vektorsumme dieser beiden Bewegungen (Superpositionsprinzip), sodass sich der Planet statt nach c nach C bewegt.

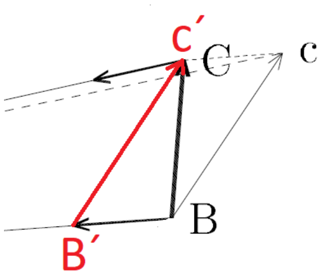
Im zweiten mathematischen Schritt werden die Zeitintervalle Δt zu dt infinitesimal verkleinert.

Folgerung 1: Die Bewegung des Planeten verläuft in einer Ebene, die die Sonne enthält. Diese Ebene wird vom Anfangsradius $\vec{r_0}$ und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_0}$ aufgespannt. Alle Zusatzgeschwindigkeiten aufgrund der Gravitationskraft liegen in dieser Ebene, die deshalb vom Planeten niemals verlassen wird.

Folgerung 2: Alle in gleichen Zeiten vom Radiusvektor überstrichenen Flächen sind gleich groß. Für den Nachweis dieser Folgerung betrachten wir die entsprechenden Dreiecke:

Die Dreiecke SAB und SBc haben die gleiche Fläche, da sie in den Seiten AB bzw. Bc und der (dazu normalen) Höhe h übereinstimmen. Das bedeutet physikalisch, dass der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleich große Flächen überstreicht, wenn außer der Trägheit keine weitere Kraft auf den Planeten wirkt.

Des Weiteren haben die Dreiecke SBc und SBC die gleiche Fläche, da sie die Seite SB gemeinsam haben und deren Höhe aufgrund der Parallelität von SB und Cc gleich ist. (Man beachte, dass die Gravitationskraft für das zweite Zeitintervall ausschließlich im Punkt B angreift! Diese Vereinfachung fällt natürlich nach der Limesbildung weg.) Zur verbesserten Anschauung kann man durch Einzeichnen des Vektors B´c´ die Vektoren auch zum Kräfteparallelogramm ergänzen.

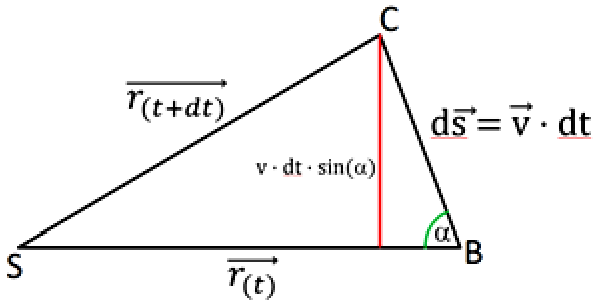


Damit ist das 2. Keplersche Gesetz bewiesen.

Bereits Newton nannte den Drehimpuls als Anwendung seines ersten Gesetzes und leitete die Drehimpulserhaltung mit folgendem geometrischen Beweis aus dem Flächensatz ab. Soweit bekannt, beschrieb als erster Bernoulli im Jahr 1744 den Drehimpuls in der heute verwendeten Bedeutung[8].

Zum Beweis der Drehimpulserhaltung benennen wir nach Bildung des Grenzwertes $\Delta t \rightarrow dt$ die Dreieckseiten um:

SB heißt nun $\overrightarrow{r_{(t)}}$
SC heißt nun $\overrightarrow{r_{(t+dt)}}$
BC heißt nun $d\vec{s} = \vec{v} \cdot \mathrm{dt}$
Die Höhe dieses Dreiecks ist damit h $= |\vec{v}| \cdot \mathrm{dt} \cdot \sin(\alpha)$



Die Fläche dieses infinitesimal kleinen Dreiecks ist nun

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{r_{(t)}}\right| \cdot |\vec{v} \cdot \mathrm{dt}| \cdot \sin(\alpha)$$

Elementarumformung

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{r_{(t)}}\right| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$$

Man setzt $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \cdot \left|\overrightarrow{r_{(t)}}\right| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\alpha)$$

Man erkennt das Kreuzprodukt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \cdot \left|\overrightarrow{r_{(t)}} \times \vec{p}\right|$$

Das Kreuzprodukt von Radiusvektor und Tangentialimpuls ist aber der Drehimpuls[9].[10]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \cdot |\vec{L}|$$

---

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_momentum#History, letzter Zugriff 04.09.2019.
[9] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehimpuls , letzter Zugriff 03.09.2019.
[10] Da die Eigendrehung des Planeten aufgrund des 3. Newtonschen Gesetzes für vorliegendes Problem nicht von Bedeutung ist, ist mit „Drehimpuls“ der „Bahndrehimpuls“ gemeint.

Bei als konstant angesehener Masse des Himmelskörpers ist damit der Drehimpuls der Änderung der in gleichen Zeiten vom Fahrstrahl überstrichenen Flächen proportional. Um die Drehimpulserhaltung zu beweisen, benötigt es nur noch einen Schritt[11]:

Da die wirksame Kraft eine Zentralkraft ist, gilt definitionsgemäß

$$\vec{F} \parallel \overrightarrow{r_{(t)}} \leftrightarrow \vec{F} \times \overrightarrow{r_{(t)}} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \sim \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_{(t)}} \times \vec{v}\right) = \frac{d\,\overrightarrow{r_{(t)}}}{dt} \times \vec{v} + \overrightarrow{r_{(t)}} \times \frac{d\,\vec{v}}{dt} \sim \vec{v} \times \vec{v} + \overrightarrow{r_{(t)}} \times \vec{F} = 0$$

Da das Kreuzprodukt paralleler (damit natürlich auch gleicher) Vektoren gleich Null ist, ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses Null.

Die Gleichung

$$\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \sim \vec{F}$$

scheint auf den ersten Blick ein wenig problematisch. Man argumentiert, dass nur die Zentralkraft imstande ist, die Geschwindigkeit des Planeten zu verändern. Daher ist es zulässig, den Kraftvektor als parallel zum Ortsvektor zu betrachten.

Damit ist die Erhaltung des Drehimpulses unter der Wirkung von Zentralkräften bewiesen.

Man beachte, dass das 2. Keplersche Gesetz im Gegensatz zu seinen beiden anderen Gesetzen nicht auf die $1/r^2$ Kraft der Gravitation beschränkt ist, sondern allgemein für alle Zentralkräfte gilt![12] Ja, es benötigt nicht einmal eine Bahn nach Art eines Kegelschnittes, um gültig zu sein!

---

[11] Demtröders Argumentation auf S.69 links unten ist daher etwas unsauber!

[12] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze , letzter Zugriff 03.09.2019.

4. Die Ableitung des 3. Keplerschen – Gesetzes aus den Newton – Gesetzen

Der Begriff Zentripetalkraft leitet sich von petere (lateinisch für streben nach, sich begeben) ab. Er wurde als vis centripeta von Isaac Newton eingeführt. Newton verwendete den Begriff allerdings nicht im heutigen Sinne, sondern im Sinne einer anziehenden Zentralkraft. Den Namen prägte Newton als Gegensatz zu der von Christian Huygens zuvor eingeführten Zentrifugalkraft. Newton verstand darunter allerdings das, was heute Zentralkraft heißt, was bei nicht genau kreisförmigen Bahnen einen Unterschied bedeutet[13].

Definition: Die Zentripetalkraft wird aus der Geschwindigkeit und der Bahnkrümmung der Bewegung eines Körpers an seinem aktuellen Ort ermittelt und weist zum Mittelpunkt der Krümmungskreises, der nicht mit dem physikalischen Kraftzentrum übereinstimmen muss. Für Bahnen entlang von Kegelschnitten liegt das Kraftzentrum in einem der Brennpunkte der Bahn.[14]

Bei der Bewegung eines Planeten der Masse m_p um die Sonne mit Masse m_s auf einer Kreisbahn (!) mit dem Radius r_p wirkt die Gravitationskraft der Sonne als Zentripetalkraft[15]. Somit gilt

$$F_{ZP} = F_G$$

$$m_p \cdot r_p \cdot \omega^2 = G \cdot \frac{m_p \cdot m_S}{{r_p}^2}$$

Mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ und daher } \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Ergibt sich

$$m_p \cdot r_p \cdot \frac{4\pi^2}{{T_P}^2} = G \cdot \frac{m_p \cdot m_S}{{r_p}^2}$$

Planetenmasse kürzen

$$r_p \cdot \frac{4\pi^2}{{T_P}^2} = G \cdot \frac{m_S}{{r_p}^2}$$

Elementarumformung

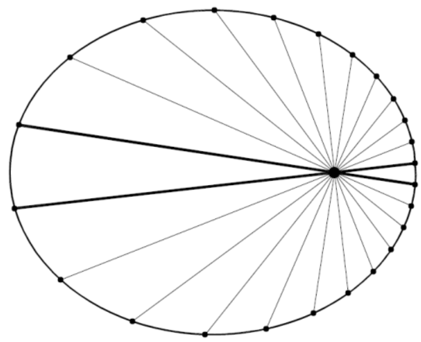
$$\frac{4\pi^2}{G \cdot m_S} = \frac{{T_P}^2}{{r_p}^3}$$

Die linke Seite der Gleichung ist aber von den Daten des Planeten unabhängig. Damit ist das dritte Keplersche Gesetz bewiesen.

[13] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Zentripetalkraft , letzter Zugriff 04.09.2019.
[14] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Zentripetalkraft , letzter Zugriff 15.01.2021.
[15] Dieser gesamte Beweis stammt aus dem File https://www.leifiphysik.de/mechanik/gravitationsgesetz-und-feld/ , letzter Zugriff 04.09.2019.

5. Die Ableitung des 1. Keplerschen – Gesetzes aus den Newton – Gesetzen

Diese Ableitung ist weitaus trickreicher als die beiden anderen. Ausgangspunkt ist gemäß Feynman[16] folgende Eigenschaft der Ellipse:

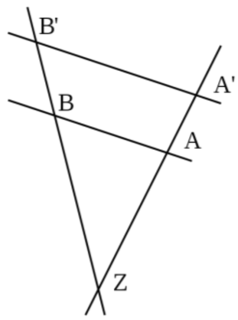


Der Fahrstrahl r $=\overline{F_i P}$ bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Dann ist die Fläche der in gleichen Winkeln (!) überstrichenen Dreiecke proportional zu r^2, sofern diese Dreiecke klein genug sind.

Das beweisen wir einmal:

Alle entstehenden Dreiecke sind ähnlich, da alle den gleichen Spitzwinkel haben. Die Höhen dieser Dreiecke sind proportional zu r und aufgrund des zweiten Strahlensatzes auch die Grundseiten.



> Zweiter Strahlensatz[17]: Es werden zwei durch einen Punkt (Scheitel) verlaufende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, die nicht durch den Scheitel gehen. Dann gilt: Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf jeweils derselben Geraden.
> |A B| : |A´B´| = |Z A| : |Z A´|

Daher gilt für die Flächen dieser Dreiecke

$$A_\Delta \sim r^2$$

Eine variierte Sichtweise, die vielleicht leichter nachvollziehbar ist:

Für die Höhe jedes Teildreiecks gilt (mit der Approximation tg(φ)=φ, das sind bei 5° etwa 3‰ Fehler, bei 0.5° lediglich 25ppm Fehler)

$$h = r \cdot tg(\Delta\varphi)$$

Die Fläche dieses Dreiecks ist daher

$$A_\Delta = r \cdot \frac{tg(\Delta\varphi)}{2} \cdot r = r^2 \cdot \frac{tg(\Delta\varphi)}{2}$$

Gemäß des zweiten Keplerschen Gesetzes werden in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstrichen. Daher sind die zugehörigen Zeitintervalle proportional zu den Flächen.

$$\Delta t \sim A_\Delta \sim r^2$$

Aufgrund des Gravitationsgesetzes nimmt die auf den Planeten ausgeübte Kraft aber mit dem Quadrat des Abstandes ab: $F \sim \frac{1}{r^2}$

---

[16] Diese Ableitung und einige Bilder stammen aus dem Lehrvideo „Feynman's Lost Lecture (ft. 3Blue1Brown).mp4“.

[17] Unter Verwendung von https://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz , letzter Zugriff 15.01.2021.

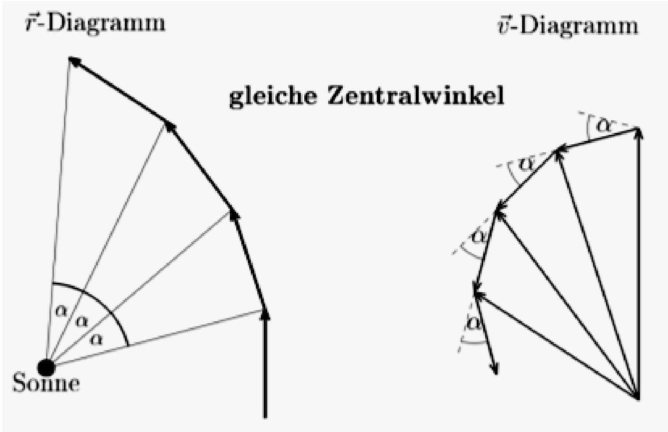
Daher

$$F \cdot \Delta t \sim \frac{1}{r^2} \cdot \, r^2 = 1$$

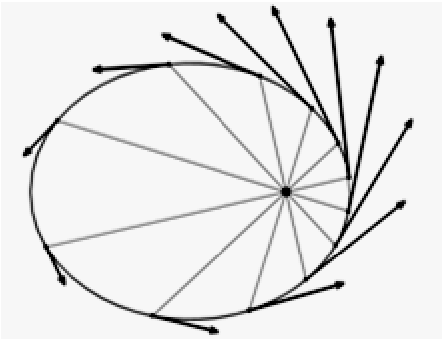
$$\Delta v \sim F \cdot \Delta t \; = const$$

Das ist der entscheidende Ausgangspunkt für die Konstruktion der Bahn.

Man beachte, dass die Änderung der Geschwindigkeit vektoriell betrachtet die Konsequenz der Zentralkraft = Gravitationskraft ist. Daher ist $\overrightarrow{\Delta v} \;\parallel\; \vec{F}$.

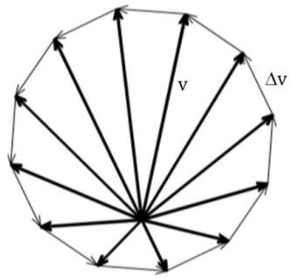


Da alle $\overrightarrow{\Delta v_i}$ parallel zu den entsprechenden Radiusvektoren $\vec{r_i}$ sind, bilden auch alle denselben Winkel zueinander.



← In diesem Diagramm sind Radiusvektoren mit gleichen Winkeln zueinander und die dazu gehörenden Geschwindigkeitsvektoren dargestellt. Man beachte, dass diese $\vec{v_i}$ jeweils tangential zur Ellipse stehen. Gemäß dem 2. Keplerschen Gesetz sind diese Geschwindigkeiten in Sonnenferne gering und in Sonnennähe hoch.

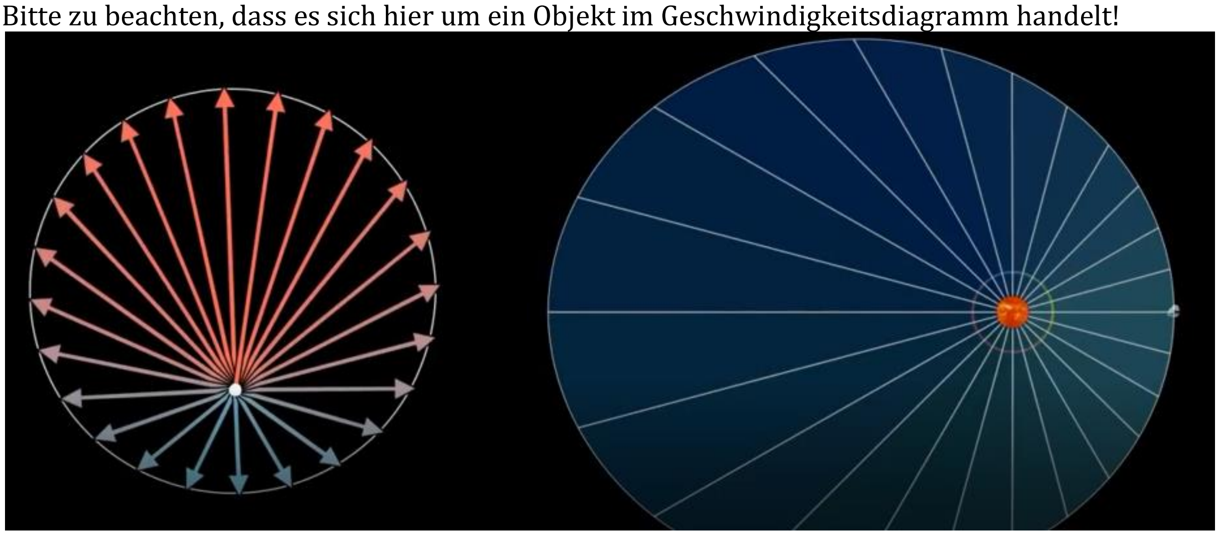
Nun kann man diese Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v_i}$ von einem Punkt aus auftragen. →



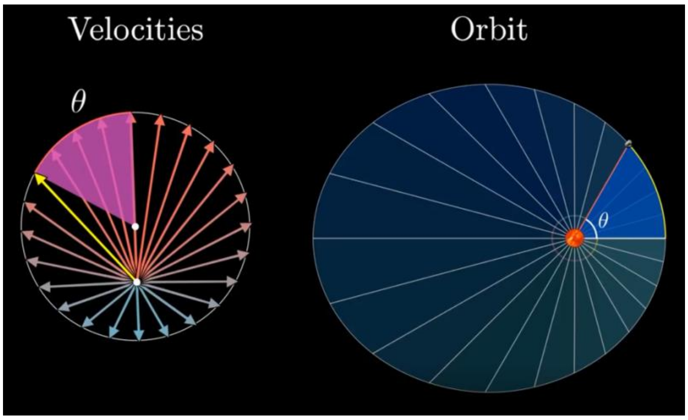
Die Vektoren $\overrightarrow{\Delta v_i}$ bilden dann ein regelmäßiges Polygon, das mit infinitesimal kleinen Beobachtungswinkeln in einen (im allgemeinen exzentrischen!) Kreis übergeht!

Das ist ein durchaus erstaunliches Phänomen, das einer Erklärung bedarf. Dazu zurück zum 2. Keplerschen Gesetz: Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Wie vorher (als Konsequenz der gegenseitigen Aufhebung der r^2 Abhängigkeit von Gravitationsgesetz und Flächensatz des Dreiecks) berechnet, sind alle $\overrightarrow{\Delta v_i}$ gleich, sofern die Winkelgeschwindigkeit gleich ist. Das heißt also, dass die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v_i}$ gleichen Winkel zueinander haben und alle $\overrightarrow{\Delta v_i}$ gleich sind. Daher bilden sie ein regelmäßiges Polygon.

Bitte zu beachten, dass es sich hier um ein Objekt im Geschwindigkeitsdiagramm handelt!

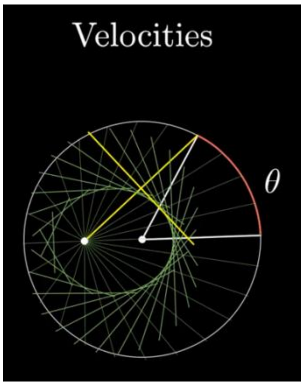


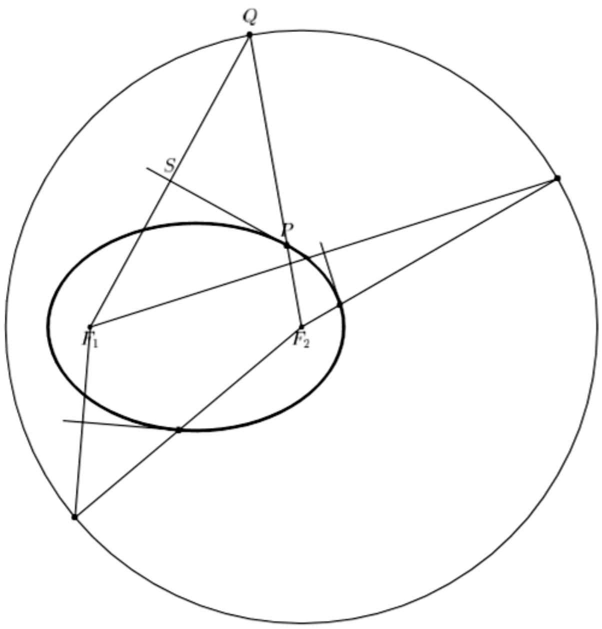
Die große Frage ist nun, wie man dieses Objekt im Geschwindigkeitsdiagramm auf das Objekt im Ortsdiagramm beziehen kann.



Wir wissen, dass wenn sich ein Planet im Ortsdiagramm um den Winkel Θ dreht, er dies auch im Geschwindigkeitsdiagramm macht. Dabei ist aber zu beachten, dass sich Θ auf den Mittelpunkt des resultierenden Kreises bezieht und nicht auf den Ausgangspunkt der Geschwindigkeitsvektoren!

Als nächstes wird zu jedem Geschwindigkeitsvektor die Mittelsenkrechte konstruiert. Sofort erhält man die Einhüllende einer Ellipse. Dieser erstaunliche Effekt beruht auf der Konstruktion einer Ellipse nach dem Spiegelverfahren:

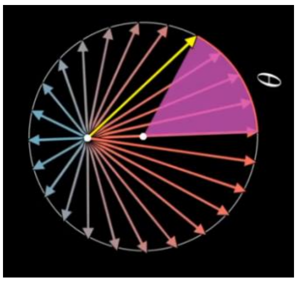


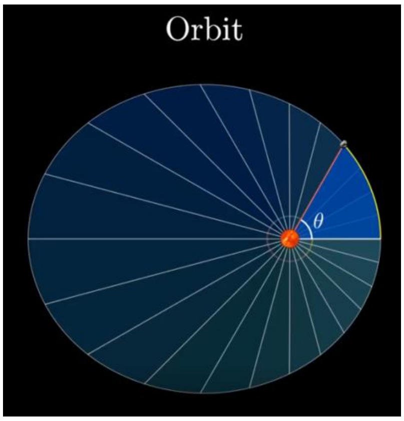


Ausgangspunkt der Konstruktion ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt F_2 und dem Radius l.

- Für alle Punkte des Kreises Q_i zeichne man die Strecke $F_1 - Q_i$.
- Auf diese Strecken konstruiere man die jeweilige Mittelsenkrechte.
- Man erhält die Schnittpunkte S_i mit den Strecken $F_1 - Q_i$ und die Schnittpunkte P_i mit den Strecken $F_2 - Q_i$.
- Dann ist die Menge aller Punkte P_i die Ellipse. Des weiteren ist die durch S – P führende Gerade Tangente an die Ellipse an der Stelle P.

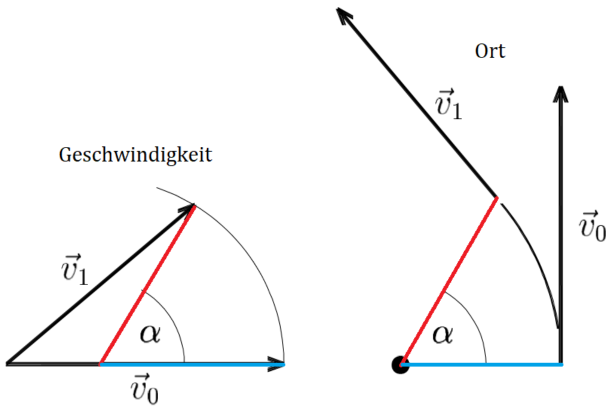
Feynmans Trick beruht darauf, das Geschwindigkeitsdiagramm um 90° zu drehen.

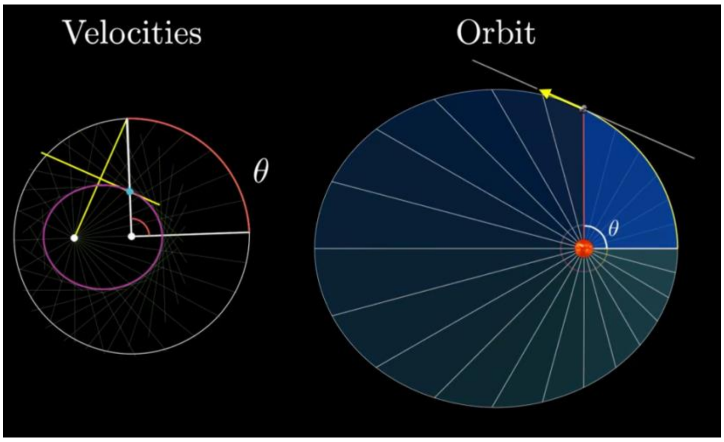




Damit sind die Radien im Ortsdiagramm und im Geschwindigkeitsdiagramm parallel (rote und blaue Linie). Die Geschwindigkeitsvektoren stehen normal aufeinander.

Dann wird zu jedem Geschwindigkeitsvektor die jeweilige Mittelsenkrechte konstruiert.





Für einen gegebenen Winkel Θ ist nun die Tangente an die Ellipse im Ortsdiagramm parallel zur entsprechenden Tangente im Geschwindigkeitsdiagramm. Daher sind die beiden Ellipsen abgesehen von einem allgemeinen Größenfaktor gleich.

Nochmals:

- Man überträgt die Geschwindigkeitsvektoren im Ortsdiagramm in ein Geschwindigkeitsdiagramm, indem man sie von einem Punkt aus einzeichnet. Es ergibt sich ein exzentrisches Polygon, welches im Grenzübergang in einen exzentrischen Kreis übergeht.

- Der Mittelpunkt des Kreises, nicht der genannte Ausgangspunkt der Geschwindigkeitsvektoren ist der Ursprung des Koordinatensystems im Geschwindigkeitsdiagramm!

- Man dreht das Geschwindigkeitsdiagramm um 90° nach rechts und identifiziert die Ursprünge in beiden Diagrammen miteinander.

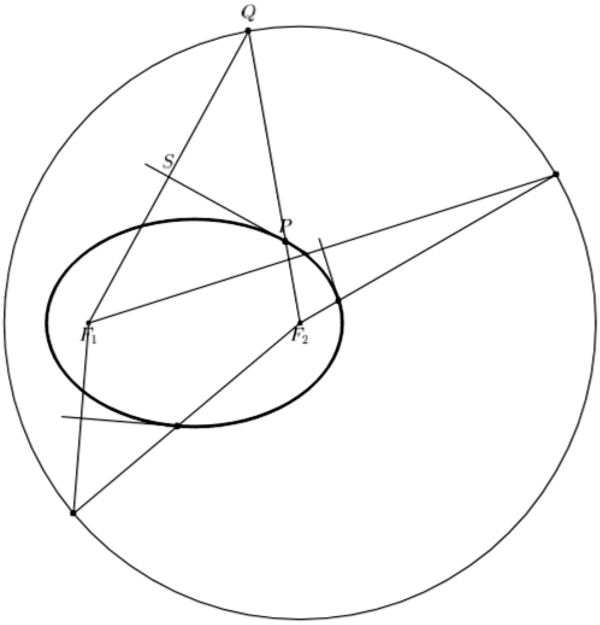
- Für jeden Drehwinkel Θ wird im Geschwindigkeitsdiagramm ein Ellipsenpunkt konstruiert. Dazu wird vom Kreismittelpunkt ein Strahl im Winkel Θ mit der Kreislinie geschnitten und erhält den Punkt Q. Von Q aus konstruiert man die Strecke zum Ausgangspunkt der Geschwindigkeitsvektoren. Daher ist dieser Punkt in der Folge der Brennpunkt F1 der Ellipse im Geschwindigkeitsdiagramm. Man konstruiert die Mittelsenkrechte auf die Strecke Q – F1.

- Diese ist Tangente an die Ellipse im Geschwindigkeitsdiagramm und dazu parallel zum Geschwindigkeitsvektor im Ortsdiagramm beim Drehwinkel Θ. Daher sind die Ellipse im Geschwindigkeitsdiagramm und die Bahnkurve im Ortsraum (abgesehen von einem festen Maßstab) gleich.

- Aufgrund der Voraussetzung einer geschlossenen Kurve kann die Bahnkurve daher ausschließlich eine Ellipse bzw. in Ausnahmefällen ein Kreis sein!

6. Die Spiegelkonstruktion analytisch betrachtet

In diesem Kapitel wird die vorher geometrisch beschriebene Konstruktion der Ellipse analytisch gerechnet.



F1 (-2e,0)
F2 (0,0)
|F2 Q| = r
Gesucht: S, P, a, b, Ellipsengleichung

1) a muss die Halbierende zwischen F1 und (r,0) sein. An dieser Stelle gilt Q = (r,0) sowie S=P. S ist aber die Mitte zwischen F1 und Q. Der Hauptscheitel der Ellipse liegt daher um $\frac{2e+r}{2}$ rechts von F2. F2 liegt aber um e links des Mittelpunktes der Ellipse.

Daher ist

$$a = \frac{2e+r}{2} - e = \frac{r}{2}$$

2) Wegen $e^2 = a^2 - b^2$ muss $b^2 = a^2 - e^2$ sein.

$$b^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - e^2$$

Und damit

$$b = \sqrt{\frac{r^2}{4} - e^2}$$

3) S ist der halbierende Punkt zwischen F1 und Q, daher ist

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{F1} + \mathrm{Q}}{2}$$

konkret

$$S = \frac{(-2e, 0) + (r\cos\alpha, r\sin\alpha)}{2} = \frac{(-2e + r\cos\alpha, r\sin\alpha)}{2}$$

4) Der Vektor $\vec{q} = \mathrm{Q} - \mathrm{F1}$ hat die Komponenten

$$\vec{q} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) - (-2e, 0) = (r\cos\alpha + 2e, r\sin\alpha)$$

Der dazu normale Vektor $\vec{n}$ beispielsweise

$$\vec{n} = (-r\sin\alpha, r\cos\alpha + 2e)$$

Die Tangente t (durch S und entlang von $\vec{n}$) hat daher die Parameterform

$$\vec{t} = \frac{(-2e + r\cos\alpha, r\sin\alpha)}{2} + u\,(-r\sin\alpha, r\cos\alpha + 2e)$$

Analytisch

$$x = \frac{(-2e + r\cos\alpha)}{2} + u\,(-r\sin\alpha)$$

$$u\,(r\sin\alpha) = \frac{-2e + r\cos\alpha - 2x}{2}$$

$$u\; = \frac{-2e + r\cos\alpha - 2x}{2(r\sin\alpha)}$$

$$y = \frac{r\sin\alpha}{2} + u\,(r\cos\alpha + 2e\,)$$

$$u\,(r\cos\alpha + 2e\,)\; = \frac{2y - r\sin\alpha}{2}$$

$$u\; = \frac{2y - r\sin\alpha}{2(r\cos\alpha + 2e\,)}$$

$$\frac{2y - r\sin\alpha}{2(r\cos\alpha + 2e\,)} = \frac{-2e + r\cos\alpha - 2x}{2(r\sin\alpha)}$$

$$\frac{2y - r\sin\alpha}{(r\cos\alpha + 2e\,)} = \frac{-2e + r\cos\alpha - 2x}{(r\sin\alpha)}$$

$$2y - r\sin\alpha = \frac{(-2e + r\cos\alpha - 2x)(r\cos\alpha + 2e\,)}{(r\sin\alpha)}$$

$$2y = \frac{(-2e + r\cos\alpha - 2x)(r\cos\alpha + 2e\,)}{(r\sin\alpha)} + r\sin\alpha$$

$$y = \frac{(-2e + r\cos\alpha - 2x)(r\cos\alpha + 2e\,)}{2(r\sin\alpha)} + \frac{r\sin\alpha}{2}$$

$$y = \frac{-2\,e\,r\,cos\;\alpha + r\cos\alpha\,r\;cos\;\alpha - 2\,x\,r\;cos\;\alpha - 4e^2 + 2\,e\,r\cos\alpha - 4\,e\,x}{2\,r\sin\alpha} + \frac{r\sin\alpha}{2}$$

$$y = \frac{r^2\cos^2\alpha - 2\,x\,r\;cos\;\alpha - 4e^2 - 4\,e\,x}{2\,r\sin\alpha} + \frac{r\sin\alpha}{2}$$

$$y = \left(\frac{-4\,e - 2\,r\;cos\;\alpha}{2\,r\sin\alpha}\right)x + \left(\frac{r^2\cos^2\alpha - 4e^2}{2\,r\sin\alpha} + \frac{r\sin\alpha}{2}\right)$$

Die Gerade g: F2 – Q hat in Parameterform die Gleichung

$$\vec{g} = (0{,}0) +\; w(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$

Analytisch daher

$$x =\; w\,r\;cos\;\alpha$$

$$y =\; w\,r\;sin\;\alpha$$

$$y = \frac{x}{r\;cos\;\alpha}\;r\;sin\;\alpha = x\;tg\;\alpha$$

Der Schnittpunkt P hat daher die Koordinaten

$$x\,\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \left(\frac{-4\ e - 2\ r\ cos\ \alpha}{2\ r \sin\alpha}\right)x + \left(\frac{r^2\cos^2\alpha - 4\ e^2}{2\ r\sin\alpha} + \frac{r\sin\alpha}{2}\right)$$

$$x\left(\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} + \frac{4\ e + 2\ r\ cos\ \alpha}{2\ r\sin\alpha}\right) = \frac{r^2\cos^2\alpha - 4\ e^2 + r^2\sin^2\alpha}{2\ r\sin\alpha}$$

$$x\left(\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} + \frac{4\ e + 2\ r\ cos\ \alpha}{2\ r\sin\alpha}\right) = \frac{r^2 - 4\ e^2}{2\ r\sin\alpha}$$

$$x\left(\frac{2\ r\sin\alpha\ sin\ \alpha}{cos\ \alpha} + 4\ e + 2\ r\ cos\ \alpha\right) = r^2 - 4e^2$$

$$x\left(\frac{2\ r\sin^2\alpha}{cos\ \alpha} + 4\ e + 2\ r\ cos\ \alpha\right) = r^2 - 4e^2$$

$$x\left(\frac{2\ r\,(1 - \cos^{22}\alpha)}{cos\ \alpha} + 4\ e + 2\ r\ cos\ \alpha\right) = r^2 - 4e^2$$

$$x\left(\frac{2\ r}{cos\ \alpha} - 2\ r\cos\alpha + 4\ e + 2\ r\ cos\ \alpha\right) = r^2 - 4e^2$$

$$x\left(\frac{2\ r}{cos\ \alpha} + 4\ e\right) = r^2 - 4e^2$$

$$x = \frac{r^2 - 4\ e^2}{\frac{2\ r}{cos\ \alpha} + 4\ e}$$

$$y = x\,\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{r^2 - 4\ e^2}{\frac{2\ r}{cos\ \alpha} + 4\ e}\cdot\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{(r^2 - 4\ e^2)\cdot sin\ \alpha}{\frac{2\ r\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} + 4\ e\ cos\ \alpha} = \frac{(r^2 - 4\ e^2)\cdot sin\ \alpha}{2\ r + 4\ e\ cos\ \alpha}$$

$$y = \frac{(r^2 - 4\ e^2)\cdot sin\ \alpha}{2\ r + 4\ e\ cos\ \alpha}$$

Dass diese Darstellung eine Ellipse ergeben soll, ist nicht unmittelbar einsichtig. Zum Beweis dieser Annahme müssen die berechneten Koordinaten der Ellipsengleichung in Brennpunktlage entsprechen:

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Um diese Formel nutzen zu können, müssen die Ausrücke in a und b auf r und e geändert werden. Wir erinnern uns

$$a^2 = \frac{r^2}{4}$$

Und

$$b^2 = \frac{r^2}{4} - e^2$$

Daher

$$\frac{(x+e)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{r^2}{4} - e^2} = 1$$

$$\frac{4\,(x+e)^2}{r^2} + \frac{4\,y^2}{r^2 - 4\,e^2} = 1$$

$$\frac{(x+e)^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - 4\,e^2} = \frac{1}{4}$$

Einsetzen

$$\frac{\left(\frac{r^2-4\,e^2}{\frac{2\,r}{\cos\alpha}+4\,e} + e\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{(r^2-4\,e^2)\cdot\sin\alpha}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2 - 4\,e^2} = \frac{1}{4}$$

Auch nicht intuitiv…

$$\frac{\left(\frac{r^2-4\,e^2}{\frac{2\,r+4\,e\cos\alpha}{\cos\alpha}} + e\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{(r^2\sin\alpha - 4\,e^2\sin\alpha)}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2 - 4\,e^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\left(\frac{r^2\cos\alpha - 4\,e^2\cos\alpha}{2\,r+4\,e\cos\alpha} + e\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{(r^2\sin\alpha - 4\,e^2\sin\alpha)}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2 - 4\,e^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\left(\frac{r^2\cos\alpha - 4\,e^2\cos\alpha + 2\,r\,e + 4\,e^2\cos\alpha}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{(r^2\sin\alpha - 4\,e^2\sin\alpha)}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2 - 4\,e^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\left(\frac{r^2\cos\alpha + 2\,r\,e}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{(r^2\sin\alpha - 4\,e^2\sin\alpha)}{2\,r+4\,e\cos\alpha}\right)^2}{r^2 - 4\,e^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{(r^2\cos\alpha + 2\,r\,e)^2}{r^2\,(2\,r+4\,e\cos\alpha)^2} + \frac{(r^2\sin\alpha - 4\,e^2\sin\alpha)^2}{(r^2-4\,e^2)(2\,r+4\,e\cos\alpha)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{(r^2\cos\alpha + 2\,r\,e)^2}{r^2} + \frac{(r^2\sin\alpha - 4\,e^2\sin\alpha)^2}{r^2-4\,e^2} = \frac{(2\,r+4\,e\cos\alpha)^2}{4}$$

$$\frac{r^4\cos^2\alpha + 4\,r^3\,e\cos\alpha + 4\,r^2\,e^2}{r^2} + \frac{r^4\sin^2\alpha - 8\,r^2e^2\sin^2\alpha + 16\,e^4\sin^2\alpha}{r^2-4\,e^2}$$
$$= \frac{4\,r^2 + 16\,r\,e\cos\alpha + 16\,e^2\cos^2\alpha}{4} = r^2 + 4\,r\,e\cos\alpha + 4\,e^2\cos^2\alpha$$

$$r^4\cos^2\alpha + 4\,r^3\,e\cos\alpha + 4\,r^2\,e^2 + \frac{r^6\sin^2\alpha - 8\,r^4e^2\sin^2\alpha + 16\,r^2\,e^4\sin^2\alpha}{r^2-4\,e^2}$$
$$= r^4 + 4\,r^3\,e\cos\alpha + 4\,r^2\,e^2\cos^2\alpha$$

$$r^4\cos^2\alpha + 4\,r^2\,e^2 + \frac{r^6\sin^2\alpha - 8\,r^4e^2\sin^2\alpha + 16\,r^2\,e^4\sin^2\alpha}{r^2-4\,e^2} = r^4 + 4\,r^2\,e^2\cos^2\alpha$$

$$r^2\cos^2\alpha + 4\,e^2 + \frac{r^4\sin^2\alpha - 8\,r^2e^2\sin^2\alpha + 16\,e^4\sin^2\alpha}{r^2-4\,e^2} = r^2 + 4\,e^2\cos^2\alpha$$

$$(r^2\,cos^2\,\alpha)(r^2-4\,e^2)+4\,e^2(r^2-4\,e^2)+r^4\,sin^2\,\alpha-8\,r^2e^2\,sin^2\,\alpha+16\,e^4\,sin^2\,\alpha$$
$$=\;(r^2+4\,e^2\,cos^2\,\alpha)(r^2-4\,e^2)$$

$$r^4\,cos^2\,\alpha-4\,r^2e^2\,cos^2\,\alpha+4\,r^2e^2-16\,e^4+r^4\,sin^2\,\alpha-8\,r^2e^2\,sin^2\,\alpha+16\,e^4\,sin^2\,\alpha$$
$$=\;r^4+4\,r^2\,e^2\,cos^2\,\alpha-4\,r^2e^2-16\,e^4\,cos^2\,\alpha$$

$$r^4\,cos^2\,\alpha+8\,r^2e^2-16\,e^4+r^4\,sin^2\,\alpha-8\,r^2e^2\,sin^2\,\alpha-8\,r^2e^2\,cos^2\,\alpha+16\,e^4\,sin^2\,\alpha$$
$$+16\,e^4\,cos^2\,\alpha=\;r^4$$

$$r^4\,cos^2\,\alpha+8\,r^2e^2-16\,e^4+r^4\,sin^2\,\alpha-8\,r^2e^2\;+16\,e^4\;=\;r^4$$

$$r^4\,cos^2\,\alpha-16\,e^4+r^4\,sin^2\,\alpha\;+16\,e^4\;=\;r^4$$

$$r^4\,cos^2\,\alpha+r^4\,sin^2\,\alpha\;=\;r^4$$

Stimmt! Damit ist die Konstruktion der Ellipse mittels der Spiegelkonstruktion analytisch bewiesen.

7. Planetenbahnen als Lösung von Differentialgleichungen mit Ansatz

Ein ganz anderer analytischer Weg beruht auf den Differentialgleichungen, die sich aus dem Gravitationsgesetz ergeben. Der Beginn der Planetenbewegung an einer Stelle mit einer definierten Geschwindigkeit tritt dann als Anfangsbedingung auf. Diese Betrachtungen waren natürlich zu Newtons Zeiten noch nicht möglich, sondern dienen nur zur Abrundung und Vervollständigung dieser Abhandlung.

Aufstellen der Differentialgleichung[18]:

Wegen

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\vec{x}''$$

Gl 7.1.

lässt sich die Bewegung eines Planeten wie folgt komponentenweise darstellen[19]:

$$\ddot{x} = -\frac{G\,M\,x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Gl 7.2a.

$$\ddot{y} = -\frac{G\,M\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Gl 7.2b.

Als Anfangsbedingungen gelten:

$$x(0) = R > 0$$

Gl 7.3a.

$$y(0) = 0$$

Gl 7.3b.

$$\dot{x} = v_x$$

Gl 7.3c.

$$\dot{y} = v_y \neq 0$$

Gl 7.3d.

Man erkennt sofort den unangenehmen Aufbau des Gleichungssystems aufgrund der Kopplung. Daher stellt man im ersten Schritt auf Polardarstellung um. Es gelte

$$x(t) = r(t) \cdot \cos\varphi(t)$$

Gl 7.4a.

$$y(t) = r(t) \cdot \sin\varphi(t)$$

Gl 7.4b.

In komplexer Schreibweise, ebenso verkürzt[20]

$$z(t) = r(t) \cdot e^{i\,\varphi(t)}$$

Gl 7.5.

[18]Diese Darstellung folgt dem Text http://num.math.uni-goettingen.de/werner/angmat03-gewdif.pdf . Ich habe mir erlaubt, die Details der Ableitung aus didaktischen Überlegungen zu korrigieren. Das Schema und die Argumentation sind unverändert.
[19]Da die Gravitationskraft eine Zentralkraft ist, wird das Bezugssystem so gedreht, dass alle Bewegungen in der x – y – Ebene stattfinden. Die Planetenmasse wird gleich gekürzt.
[20]Ab dieser Stelle habe ich nach einem Hinweis von Herrn Prof Dr. Auzinger die Notierungen des Originaltextes abgewandelt, indem ich die Abhängigkeiten der Variablen durchgehend explizit formuliert habe. Das vermindert zwar die Lesbarkeit ein wenig, sorgt jedoch für mathematische Klarheit.

Abgeleitet

$$\dot{z}(t) = \dot{r}(t) \cdot e^{i\,\varphi(t)} + r(t) \cdot i \cdot e^{i\,\varphi(t)} \cdot \dot{\varphi}(t) = [\dot{r}(t) + i \cdot r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)] \cdot e^{i\,\varphi(t)}$$ [21]

Gl 7.6.

Und noch einmal

$$\ddot{z}(t) = (\ddot{r}(t) + i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + i \cdot r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t))e^{i\,\varphi(t)} + (\dot{r}(t) + i \cdot r(t) \cdot \dot{\varphi}(t))\; i\, e^{i\,\varphi(t)} \cdot \dot{\varphi}(t)$$

$$\ddot{z}(t) = (\ddot{r}(t) + i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + i \cdot r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t))e^{i\,\varphi(t)} + (i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2)e^{i\,\varphi(t)}$$

$$\ddot{z}(t) = [\ddot{r}(t) + 2 \cdot i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + i \cdot r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) - r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2]\; e^{i\,\varphi(t)}$$

Gl 7.7.

Einsetzen in das Gravitationsgesetz mit gekürzter Planetenmasse

$$\ddot{x}(t) = -\frac{G\,M\,r(t)\cos\varphi(t)}{\left(r(t)^2\cos^2\varphi(t) + r(t)^2\sin^2\varphi(t)\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{G\,M\;\cos\varphi(t)}{r(t)^2}$$

Gl 7.8a.

$$\ddot{y}(t) = -\frac{G\,M\,r(t)\sin\varphi(t)}{(r(t)^2\cos^2\varphi(t) + r(t)^2\sin^2\varphi(t))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{G\,M\;\sin\varphi(t)}{r(t)^2}$$

Gl 7.8b.

Gl 7.8b. mit i multiplizieren

$$i\,\ddot{y}(t) = -\frac{G\,M\,i\sin\varphi(t)}{r(t)^2}$$

Gl 7.9a.

Gl 7.8a. und Gl 7.9a. addieren

$$\ddot{x}(t) + i\,\ddot{y}(t) = -\frac{G\,M\;\cos\varphi(t)}{r(t)^2} - \frac{G\,M\,i\sin\varphi(t)}{r(t)^2} = \left(-\frac{G\,M}{r(t)^2}\right)(\cos\varphi(t) + i\sin\varphi(t))$$

Komplex darstellen

$$\ddot{z}(t) = \left(-\frac{G\,M}{r(t)^2}\right)(\cos\varphi(t) + i\sin\varphi(t)) = \left(-\frac{G\,M}{r(t)^2}\right)e^{i\,\varphi(t)}$$

Gl 7.10.

Links Gl 7.7. einsetzen

$$[\ddot{r}(t) + 2 \cdot i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + i \cdot r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) - r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2]\; e^{i\,\varphi(t)} = \left(-\frac{G\,M}{r(t)^2}\right)e^{i\,\varphi(t)}$$

Kürzen

$$\ddot{r}(t) + 2 \cdot i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + i \cdot r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) - r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 = -\frac{G\,M}{r(t)^2}$$

Gl 7.11.

Durch diese Operationen wurde aus einem gekoppelten System von zwei gewöhnlichen DGL eine einzelne in zwei Variablen.

Mittels Koeffizientenvergleich wird Gl 7.11.in Real- und Imaginärteil zerlegt

Realteil

$$\ddot{r}(t) - r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 + \frac{G\,M}{r(t)^2} = 0$$

[21] φ hängt von t ab, daher an die innere Ableitung denken!

Gl 7.12a.

Für den Imaginärteil ist die rechte Seite 0, da sie reell bleiben muss

$$2 \cdot \ i \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + i \cdot r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) = 0$$

Durch i dividieren

$$2 \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) = 0$$

Gl 7.12b.

Die Anfangsbedingungen lauten jetzt

$$r(0) = R$$

Gl 7.13a.

$$\varphi(0) = 0$$

Gl 7.13b.

$$\dot{r}(0) = v_x$$

Gl 7.13c.

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v_y}{R}$$

Gl 7.13d.

Sie sind zu den Anfangsbedingungen im kartesischen System Gl 7.3a – d. äquivalent.

Zum Nachweis des ersten Keplerschen Gesetzes machen wir einen Ansatz: Wir vermuten, dass eine Lösung der DGL ein Kegelschnitt ist.

Zunächst definieren wir die noch unbekannten Konstanten $\epsilon \geq 0$, $p > 0$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$. Dabei sei

a Große Halbachse
b Kleine Halbachse
e Lineare Exzentrizität, der Abstand der Brennpunkte zum Mittelpunkt.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Gl 7.14a.

ϵ numerische Exzentrizität

$$\epsilon = \frac{e}{a}$$

Gl 7.14b.

p Halbparameter, die halbe Länge p einer Ellipsensehne, die durch einen Brennpunkt geht und zur Hauptachse senkrecht verläuft.

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Gl 7.14c.

Elementarumformung ergibt

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}$$

Gl 7.14d.

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

Gl 7.14e.

φ Winkelposition des Planeten.
α Drehung der Planetenbahn gegenüber der Koordinatenachsen.

Damit definieren wir die Funktion f durch

$$f(\varphi(t)) := \frac{p}{1 + \epsilon \cdot \cos(\varphi(t) - \alpha)}$$

Gl 7.15.

Anschließend sei[22]

$$t(\varphi) := \frac{1}{R\,v_y} \int_0^{\varphi} f^2(\varphi)\,d\varphi$$

Gl 7.16.

Daher umgekehrt für t(0)=0

$$\frac{d\,t(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{R\,v_y} f^2(\varphi)$$

Gl 7.17.

Der Kehrwert ergibt die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{R\,v_y}{f^2(\varphi(t))}$$

Gl 7.18.

Wir wollen uns überlegen, dass bei geeigneter Wahl der noch freien Konstanten ϵ, p, α durch (r, φ) eine Lösung von der DGL inklusive Anfangsbedingungen gegeben ist. Am einfachsten ist die Gleichung Gl 7.12.

$$2 \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) = 0$$

einzusehen.

Wir setzen

$$r(t) := f(\varphi(t))$$

Gl 7.19.

Und daher auch

$$r^2(t) := f^2(\varphi(t))$$

Gl 7.20.

Einsetzen

$$\dot{\varphi}(t) \cdot r^2(t) = f^2\big(\varphi(t)\big) \frac{R\,v_y}{f^2\big(\varphi(t)\big)} = R\,v_y$$

Gl 7.21.

Ableiten ($R\,v_y$ ist konstant, r hängt von t ab!)

$$0 = \frac{d(r^2(t)\dot{\varphi}(t))}{dt} = 2 \cdot r(t) \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r^2(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) = r(t)[\,2 \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)]$$

Gl 7.22.

Denken: r(t) ist der Abstand des Planeten von der Sonne, also muss aus physikalischen Gründen

$$r(t) > 0$$

gelten.

[22] An dieser relevanten Stelle hielt es der Autor nicht für nötig, eine Begründung oder Ableitung anzugeben. Sie muss daher als gottgegeben hingenommen werden.

Gleichung Gl 7.12 lautet

$$2 \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) = 0$$

Soeben haben wir abgeleitet

$$r(t)[\,2 \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)] = 0$$

Gl 7.22.

Da aber r(t) > 0 gilt, darf man dividieren

$$2\,\dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t) = 0$$

Gl 7.23.

Das ist aber gerade Gl 7.12! Diese ist damit erfüllt.

Des Weiteren folgt aus t(0) = 0 → φ(0) = 0. Daher ist die Anfangsbedingung Gl 7.13b.erfüllt.

Im nächsten Schritt beweisen wir Gl 7.12a., den „Realteil“.

Aus

$$r(t) := f(\varphi(t))$$

Gl 7.19.

folgt

$$\dot{r}(t) = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

Gl 7.24.

Bereits berechnet haben wir

$$\dot{\varphi} = \frac{R\,v_y}{f^2(\varphi(t))}$$

Gl 7.18.

Einsetzen

$$\dot{r}(t) = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \frac{R\,v_y}{f^2(\varphi(t))}$$

Gl 7.25.

Zur Erinnerung

$$f(\varphi(t)) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi(t) - \alpha)}$$

Gl 7.15.

Ableiten

$$f'(\varphi(t)) = \frac{p\,\epsilon \sin(\varphi(t) - \alpha)}{(1 + \epsilon \cos(\varphi(t) - \alpha))^2}$$

Gl 7.26.

Einsetzen

$$\dot{r}(t) = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \frac{R\,v_y}{f^2(\varphi(t))} = \frac{p\,\epsilon \sin(\varphi(t) - \alpha)}{(1 + \epsilon \cos(\varphi(t) - \alpha))^2} \cdot \frac{R\,v_y\,(1 + \epsilon \cos(\varphi(t) - \alpha))^2}{p^2}$$

Kürzen

$$\dot{r}(t) = \frac{R\,v_y\,p\,\epsilon \sin(\varphi(t) - \alpha)}{p^2} = \frac{\epsilon\,R\,v_y}{p} \sin(\varphi(t) - \alpha)$$

Gl 7.27.

Ableiten

$$\ddot{r}(t) = \frac{\epsilon\,R\,v_y}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

Gl 7.28.

Wir wollen schließlich beweisen, dass

$$\ddot{r}(t) - r(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 + \frac{G\ M}{r(t)^2} = 0$$

Gl 7.12a.

erfüllt ist.

Einsetzen

$$\frac{\epsilon\ R\ v_y}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) \cdot \frac{R\ v_y}{r^2(t)} - r(t) \cdot \left[\frac{R\ v_y}{f^2}\right]^2 + \frac{G\ M}{r^2(t)} = 0$$

$$\frac{\epsilon\ R\ v_y}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) \cdot \frac{R\ v_y}{r^2(t)} - r(t) \cdot \frac{R^2\ {v_y}^2}{r(t)^4} + \frac{G\ M}{r^2(t)} = 0$$

$$\frac{\epsilon\ R\ v_y}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) \cdot \frac{R\ v_y}{r^2(t)} - \frac{R^2\ {v_y}^2}{r(t)^3} + \frac{G\ M}{r^2(t)} = 0$$

Mit $r^2(t)$ erweitern

$$\frac{\epsilon\ R\ v_y}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) \cdot\ R\ v_y - \frac{R^2 v_y^2}{r(t)} + G\ M = 0$$

$$\frac{\epsilon\ R^2\ {v_y}^2}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) - \frac{R^2 v_y^2}{r(t)} + G\ M = 0$$

Einsetzen von

$$r(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\left(\varphi(t) - \alpha\right)}$$

$$\frac{\epsilon\ R^2\ {v_y}^2}{p} \cos(\varphi(t) - \alpha) - \frac{R^2\ {v_y}^2 (1 + \epsilon \cos(\varphi(t) - \alpha))}{p} + G\ M = 0$$

$$\frac{\epsilon\ R^2\ {v_y}^2\ \cos(\varphi(t) - \alpha)}{p} - \frac{R^2\ {v_y}^2}{p} - \frac{\epsilon\ R^2\ {v_y}^2 \cos(\varphi(t) - \alpha)}{p} + G\ M = 0$$

$$G\ M - \frac{R^2\ {v_y}^2}{p} = 0$$

Wählt man p daher mit

$$p = \frac{R^2\ {v_y}^2}{G\ M}$$

Gl 7.29.

so erfüllt (r, φ) auch die Gleichung Gl 7.12a.

Die Konstanten ϵ und α werden durch die Anfangsbedingungen

$$r(0) = R$$

Gl 7.13a.

$$\varphi(0) = 0$$

Gl 7.13b.

$$\dot{r}(0) = v_x$$

Gl 7.13c.

festgelegt.

$$r(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \alpha)}$$

Anfangsbedingungen für t = 0 einsetzen

$$R = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(-\alpha)} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\alpha)}$$

$$\dot{r}(t) = \frac{\epsilon R v_y}{p} \sin(\varphi(t) - \alpha)$$

$$v_x = \frac{\epsilon R v_y}{p} \sin(0 - \alpha) = -\frac{\epsilon R v_y}{p} \sin(\alpha)$$

Einsetzen von

$$p = \frac{R^2 {v_y}^2}{G M}$$

$$R = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\alpha)} = \frac{\frac{R^2 {v_y}^2}{G M}}{1 + \epsilon \cos(\alpha)}$$

$$R(1 + \epsilon \cos(\alpha)) = \frac{R^2 {v_y}^2}{G M}$$

$$1 + \epsilon \cos(\alpha) = \frac{R {v_y}^2}{G M}$$

$$\epsilon \cos(\alpha) = \frac{R v_y^2 - G M}{G M}$$

Gl 7.30a.

Und

$$v_x = -\frac{\epsilon R v_y}{p} \sin(\alpha)$$

$$v_x = -\frac{\epsilon R v_y}{\frac{R^2 {v_y}^2}{G M}} \sin(\alpha)$$

$$v_x = -\frac{\epsilon G M}{R v_y} \sin(\alpha)$$

$$\epsilon \sin(\alpha) = -\frac{R v_x v_y}{G M}$$

Gl 7.30b.

Zur Lösung dieser beiden Gleichungen dividieren wir sie durcheinander, wodurch ϵ eliminiert wird

$$\frac{\epsilon \sin(\alpha)}{\epsilon \cos(\alpha)} = \frac{-\frac{R v_x v_y}{G M}}{\frac{R v_y^2 - G M}{G M}}$$

$$tg(\alpha) = \frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}$$
$$\alpha = arctg\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)$$

Gl 7.31.

$$\epsilon \sin\left(arctg\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)\right) = -\frac{R\ v_x v_y}{G\ M}$$

Gl 7.32.

Und als Probe

$$\epsilon \cos\left(arctg\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)\right) = \frac{R\ v_y^2 - G\ M}{G\ M}$$

Wir beachten die Regeln

$$\sin(arctg\ (x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Gl 7.33a.

Und

$$\cos(arctg\ (x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Gl 7.33b.

$$\epsilon \sin\left(arctg\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)\right) = -\frac{R\ v_x v_y}{G\ M}$$

Gl 7.32.

Gl 7.33a. anwenden

$$\epsilon\ \frac{\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}}{\sqrt{\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)^2 + 1}} = -\frac{R\ v_x v_y}{G\ M}$$

$$\epsilon\ \frac{1}{(R\ v_y^2 - G\ M)\sqrt{\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{G\ M}$$

$$\frac{G\ M}{(R\ v_y^2 - G\ M)\sqrt{\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{(R\ v_y^2 - G\ M)\sqrt{\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)^2 + 1}}{G\ M}$$

$$\epsilon = \frac{(R\ v_y^2 - G\ M)\sqrt{\frac{R^2\ {v_x}^2\ {v_y}^2 + (R\ v_y^2 - G\ M)^2}{(R\ v_y^2 - G\ M)^2}}}{G\ M}$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{R^2\ {v_x}^2\ {v_y}^2 + (R\ v_y^2 - G\ M)^2}}{G\ M}$$

Gl 7.33.

Mal schauen, ob bei der anderen Gleichung dasselbe herauskommt

$$\epsilon \cos\left(arctg \left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M} \right) \right) = \frac{R\ v_y^2 - G\ M}{G\ M}$$

$$\cos(arctg\ (x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)^2 + 1}} = \frac{R\ v_y^2 - G\ M}{G\ M}$$

$$\epsilon = \frac{\left(R\ v_y^2 - G\ M\right)\sqrt{\left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}\right)^2 + 1}}{G\ M}$$

$$\epsilon = \frac{\left(R\ v_y^2 - G\ M\right)\sqrt{\frac{R^2\ {v_x}^2\ {v_y}^2 + (R\ v_y^2 - G\ M)^2}{(R\ v_y^2 - G\ M)^2}}}{G\ M}$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{R^2\ {v_x}^2\ {v_y}^2 + (R\ v_y^2 - G\ M)^2}}{G\ M}$$

Das ist das gleiche Ergebnis. Wir können daher die Werte für ϵ und α angeben.

$$\epsilon = \frac{\sqrt{R^2\ {v_x}^2\ {v_y}^2 + (R\ v_y^2 - G\ M)^2}}{G\ M}$$

Gl 7.34a.

$$\alpha = arctg\ \left(\frac{-R\ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M} \right)$$

Gl 7.34b.

Im Originaltext wird nun behauptet, dass diese Werte für ϵ und α als Polarkoordinaten des Punktes

$$Q = \left(\frac{R\ v_y^2 - G\ M}{G\ M}, \frac{-R\ \ v_x v_y}{G\ M} \right)$$

angegeben werden kann. Das prüfen wir einmal nach.

Demnach müsste

$$tg\ (\alpha) = \frac{\frac{-R\ \ v_x v_y}{G\ M}}{\frac{R\ v_y^2 - G\ M}{G\ M}} = \frac{-R\ \ v_x v_y}{R\ v_y^2 - G\ M}$$

Gl 7.35.

Und

$$\epsilon = \sqrt{\left(\frac{R\ v_y^2 - G\ M}{G\ M}\right)^2 + \left(\frac{-R\ \ v_x v_y}{G\ M}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(R\ v_y^2 - G\ M\right)^2 + R^2\ {v_x}^2\ {v_y}^2}}{G\ M}$$

sein, was offensichtlich stimmt.

Zum Abschluss müssen wir noch die Erfüllung der letzten Anfangsbedingung beweisen

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v_y}{R}$$

Gl 7.13d.

Ansatz

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{R\ v_y}{f^2(\varphi(t))}$$

Gl 7.18.

Wegen

$$r(t) := f(\varphi(t))$$

Gl 7.19.

Ist daher

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{R\ v_y}{r^2(t)}$$

Anfangsbedingung t = 0

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{R\ v_y}{r^2(0)}$$

$$r(0) = R$$

Gl 7.13a.

Einsetzen

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{R\ v_y}{R^2} = \frac{v_y}{R}$$

Gl 7.13d.

Damit ist auch die Erfüllung der letzten Anfangsbedingung beweisen.

Damit ist gezeigt: Die Anfangswertaufgabe Gl 7.2a+b besitzt eine Lösung (r,φ) mit

$$r(t) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\left(\varphi(t) - \alpha\right)}$$

Wobei $p > 0$, $\epsilon > 0$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$ geeignete Konstanten sind.

8. Die himmelsmechanische Vis – Viva – Gleichung[23]

Die himmelsmechanische Vis – Viva – Gleichung liefert die lokale Geschwindigkeit von Körpern auf Keplerbahnen um einen dominierenden Himmelskörper, der durch seine Gravitation die anderen Körper beeinflusst. Durch den dominierenden Himmelskörper kann das System näherungsweise je Körper einzeln als Zweikörperproblem beschrieben werden, wobei die Einflüsse der verschiedenen Körper untereinander vernachlässigt werden. Die Keplerbahnen sind Kegelschnitte, also Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, um den gemeinsamen Schwerpunkt, die durch die beiden Parameter der großen Halbachse und der Exzentrizität beschrieben werden.

Die Vis – Viva – Gleichung basiert auf dem Energieerhaltungssatz und dem Drehimpulserhaltungssatz, nach denen die Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie beziehungsweise der Drehimpuls im Gravitationspotential konstant ist. Die Erhaltungssätze folgen daraus, dass das Gravitationspotential zeitlich konstant ist und nur von der Entfernung vom Zentrum, nicht aber vom Winkel abhängt; die Vis – Viva – Gleichung selbst benötigt als Anforderung vom Potential nur noch, dass die radiale Abhängigkeit umgekehrt proportional zum Radius ist.

Die kinetische Energie ist nur abhängig von der Geschwindigkeit des Körpers auf der Bahn und die potentielle Energie nur von der Entfernung. Dadurch ermöglicht die Vis – Viva – Gleichung eine Verknüpfung von Geschwindigkeit und momentaner Position des Körpers. Neben dem Gravitationsparameter des Systems geht als weiterer Parameter in die Gleichung nur die große Halbachse, nicht aber die Exzentrizität der Bahn des umlaufenden Objekts ein.

Etymologisch bezieht sich die Vis – Viva – Gleichung auf die vis viva, zu Deutsch „lebendige Kraft“, in moderner Terminologie das Doppelte der kinetischen Energie.

Definitionen

M , m	die Massen der beiden Körper. In dieser vereinfachten Darstellung gelte M >> m.
r	der Abstand der beiden Körper
$\dot{r}$	die Geschwindigkeit von m in radialer Richtung zum Schwerpunkt
v^2	das Quadrat der Relativgeschwindigkeit zwischen den Körpern
v_s	die Geschwindigkeit des Schwerpunkts
a	die große Halbachse der Bahn ($a > 0$ für eine Ellipse, $a \to \infty$ für eine Parabel und $a < 0$ für eine Hyperbel)
G	die Gravitationskonstante

Herleitung

Im Gravitationspotential zweier Körper ist die Gesamtenergie die Summe aus

Kinetischer Energie des Schwerpunkts

$$W_s = \frac{M\, {v_s}^2}{2}$$

Kinetischer Energie des umlaufenden Planeten

$$W_m = \frac{m\, v^2}{2}$$

[23] Diese Ableitung stammt weitgehend aus https://de.wikipedia.org/wiki/Vis-Viva-Gleichung , letzter Zugriff am 25.12.2019. Allerdings mussten aus didaktischen Gründen mehrere Zwischenschritte ergänzt werden.

Und potentieller Energie im Gravitationsfeld

$$W_p = -\frac{G\, m\, M}{r}$$

Zusammen also

$$W = \frac{M\, {v_s}^2}{2} + \frac{m\, v^2}{2} - \frac{G\, m\, M}{r}$$

Der Drehimpuls von m ist definitionsgemäß

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\, \vec{v})$$

Stehen r und v im rechten Winkel, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$L = r\, m\, v$$

Quadrieren

$$L^2 = r^2\, m^2\, v^2$$

Elementarumformung

$$\frac{L^2}{2\, m\, r^2} = \frac{m\, v^2}{2}$$

Achtung: Das ist die nur kinetische Energie von m in tangentialer Richtung, also in Drehrichtung!

$$W_{tang} = \frac{L^2}{2\, m\, r^2} = \frac{m\, v^2}{2}$$

Dazu kommt die kinetische Energie von m in radialer Richtung!

$$W_{rad} = \frac{m\, \dot{r}^2}{2}$$

Aufgrund der Drehimpulserhaltung ergibt sich die Gesamtenergie mit dem Betrag des Drehimpulses L und dem Satz des Pythagoras damit zu

$$W = \frac{M\, {v_s}^2}{2} + \frac{m\, \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\, m\, r^2} - \frac{G\, m\, M}{r}$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt für zwei beliebige Abstände r_1 und r_2

$$\frac{M\, {v_s}^2}{2} + \frac{m\, {\dot{r}_1}^2}{2} + \frac{L^2}{2\, m\, {r_1}^2} - \frac{G\, m\, M}{r_1} = \frac{M\, {v_s}^2}{2} + \frac{m\, {\dot{r}_2}^2}{2} + \frac{L^2}{2\, m\, {r_2}^2} - \frac{G\, m\, M}{r_2}$$

Der Beitrag der Energie durch die Bewegung des Schwerpunkts ist auf beiden Seiten gleich:

$$\frac{m\, {\dot{r}_1}^2}{2} + \frac{L^2}{2\, m\, {r_1}^2} - \frac{G\, m\, M}{r_1} = \frac{m\, {\dot{r}_2}^2}{2} + \frac{L^2}{2\, m\, {r_2}^2} - \frac{G\, m\, M}{r_2}$$

An den beiden Punkten, die auf einer Keplerbahn dem Zentralkörper am nächsten und entferntesten sind, der Periapsis r_p und der Apoapsis r_a, verschwindet auch die radiale Komponente der Geschwindigkeit

$$\frac{L^2}{2\, m\, {r_p}^2} - \frac{G\, m\, M}{r_p} = \frac{L^2}{2\, m\, {r_a}^2} - \frac{G\, m\, M}{r_a}$$

Nach L^2 lösen

$$\frac{L^2}{2\,m\,{r_p}^2} - \frac{L^2}{2\,m\,{r_a}^2} = \frac{G\,m\,M}{r_p} - \frac{G\,m\,M}{r_a}$$

$$L^2\left(\frac{1}{2\,m\,r_p^2} - \frac{1}{2\,m\,r_a^2}\right) = G\,m\,M\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$L^2 = G\,m\,M\,\frac{\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}}{\frac{1}{2\,m\,r_p^2} - \frac{1}{2\,m\,r_a^2}}$$

$$L^2 = 2\,G\,m^2\,M\,\frac{\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r_p^2} - \frac{1}{r_a^2}}$$

$$L^2 = 2\,G\,m^2\,M\,\frac{1}{\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}}$$

$$L^2 = 2\,G\,m^2\,M\,\frac{r_p \cdot r_a}{r_p + r_a}$$

Daraus ergibt sich die Energie (beispielsweise an der Apoapsis) zu

$$W = \frac{L^2}{2\,m\,{r_a}^2} - \frac{G\,m\,M}{r_a}$$

$$W = \frac{2\,G\,m^2\,M\,\frac{r_p \cdot r_a}{r_p + r_a}}{2\,m\,{r_a}^2} - \frac{G\,m\,M}{r_a}$$

$$W = \frac{G\,m\,M\,\frac{r_p \cdot r_a}{r_p + r_a}}{{r_a}^2} - \frac{G\,m\,M}{r_a}$$

$$W = G\,m\,M\left(\frac{\frac{r_p \cdot r_a}{r_p + r_a}}{r_a^2} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$W = -\,G\,m\,M\left(\frac{1}{r_a} - \frac{\frac{r_p \cdot r_a}{r_p + r_a}}{r_a^2}\right)$$

$$W = -\,G\,m\,M\left(\frac{1}{r_a} - \frac{\frac{r_p}{r_p + r_a}}{r_a}\right)$$

$$W = -\,G\,m\,M\left(\frac{r_p + r_a}{(r_p + r_a)r_a} - \frac{r_p}{(r_p + r_a)r_a}\right)$$

$$W = -G\, m\, M \left(\frac{r_a}{(r_p + r_a) r_a} \right)$$

$$W = -\frac{G\, m\, M}{r_p + r_a}$$

Aus der Geometrie der Kegelschnitte folgt mit

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$W = -\frac{G\, m\, M}{2a}$$

Einsetzen in die Gesamtenergie

$$W = \frac{m\, v^2}{2} - \frac{G\, m\, M}{r}$$

$$-\frac{G\, m\, M}{2a} = \frac{m\, v^2}{2} - \frac{G\, m\, M}{r}$$

$$\frac{m\, v^2}{2} = \frac{G\, m\, M}{r} - \frac{G\, m\, M}{2a}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{G\, M}{r} - \frac{G\, M}{2a}$$

$$\frac{v^2}{2} = G\, M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

$$v^2 = G\, M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Das ist die Bahngeschwindigkeit als Funktion des Abstandes. Korrekt also

$$v(r)^2 = G\, M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

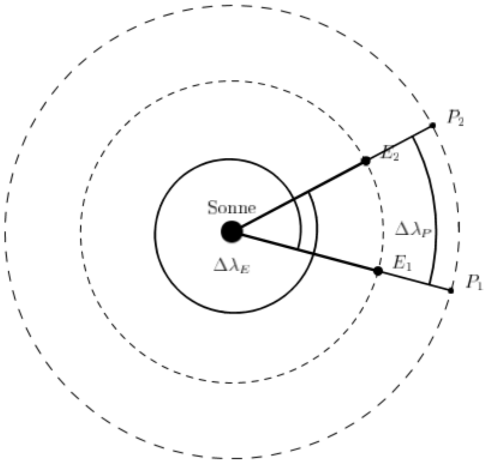
Diese Ableitung ist abgesehen von den Tücken der Formelmanipulation von überschaubarer Schwierigkeit, setzt allerdings physikalisch die Kenntnis der Erhaltungssätze von Energie und Drehimpuls voraus.

9. Die Bestimmung der Bahndaten der Planeten

Nun wollen wir versuchen, die Bahngeschwindigkeit mit den physikalischen Mitteln zu Newtons Zeiten zu berechnen[24]. Dazu benötigen wir vorerst die Bahndaten selbst. Diese wurden wie folgt gewonnen:

1. Zuerst ist die genaue Umlaufzeit der Erde zu bestimmen. Dies gelang bereits in der Antike mittels allerlei Blenden – Konstruktionen sehr gut.

2. Dann wird die synodische Umlaufzeit T_{syn} des jeweiligen Planeten bestimmt.



> Definition:[25] Die synodische Periode oder synodische Umlaufdauer (von altgriechisch σύνοδος synodos ‚Zusammentreffen') ist die Zeitspanne zwischen den Zeitpunkten aufeinanderfolgender gleicher Stellungen eines Himmelskörpers bezüglich Erde und Sonne.
>
> Anders formuliert beträgt die Dauer seiner synodischen Periode die Zeitspanne, bis ein von der Erde aus beobachteter Himmelskörper wieder die gleiche Stellung relativ zur Sonne einnimmt.

Dies geschieht am einfachsten mittels Messung der Zeit zwischen zwei Konstellationen Opposition Sonne:

P1	tatsächliche Position des Planeten bei der ersten Opposition
P2	tatsächliche Position des Planeten bei der nächsten Opposition
$\Delta\lambda_E$	Gesamter Winkel zwischen den beiden Oppositionen
$\Delta\lambda_P$	Reduzierter Winkel zwischen den beiden Oppositionen

3. Daraus berechnen wir die siderische Umlaufzeit des Planeten

> Definition:[26] Siderische Periode (lateinisch sidus ‚Stern', Genitiv sideris) heißt in der Astronomie die Zeitspanne für eine vollständige Umdrehung (Rotation) oder für einen vollständigen Umlauf (Revolution) eines Himmelskörpers in Bezug auf den Fixsternhintergrund.

Angenommen, die Winkelgeschwindigkeiten der Erde und des Planeten seien ω_E und ω_P, wobei für die Außenplaneten $\omega_E > \omega_P$ gilt. Dann ändert sich der Winkel zwischen den Planeten mit der „Relativ – Winkelgeschwindigkeit"

$$\omega = \omega_E - \omega_P$$

Man kann sich auch vorstellen, dass sich die Erde vom Planeten aus gesehen mit der Winkelgeschwindigkeit ω bewegt.

Die Konsequenz dieser Relativ – Winkelgeschwindigkeit ist, dass nach einer synodischen Umlaufzeit eine Volldrehung erreicht wird:

---

[24] Diese Ableitung folgt weitgehend den Ausführungen in himmelsmWS0203.pdf .
[25] Unter Verwendung von https://de.wikipedia.org/wiki/Synodische_Periode , letzter Zugriff 15.01.2021.
[26] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Siderische_Periode , letzter Zugriff 15.01.2021.

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{syn}}$$

Die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich als Quotienten des Kreisumfanges und der tatsächlichen (siderischen) Umlaufzeit:

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_{sidE}}$$

$$\omega_P = \frac{2\pi}{T_{sid}}$$

Einsetzen

$$\frac{2\pi}{T_{syn}} = \frac{2\pi}{T_{sidE}} - \frac{2\pi}{T_{sid}}$$

Durch 2π kürzen

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_{sidE}} - \frac{1}{T_{sid}}$$

Aus physikalischen Gründen ist T_{sidE} bekannt, nämlich die Umlaufzeit der Erde, also 1 Jahr

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{1a} - \frac{1}{T_{sid}}$$

Elementarumformung

$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{1a} - \frac{1}{T_{syn}}$$

$$T_{sid} = \frac{1}{\frac{1}{1a} - \frac{1}{T_{syn}}}$$

Damit konnten wir die siderische Umlaufzeit der Außenplaneten berechnen.

Für die Innenplaneten gilt entsprechend:

$$\frac{2\pi}{T_{syn}} = \frac{2\pi}{T_{sid}} - \frac{2\pi}{T_{sidE}}$$

Durch 2π kürzen

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{T_{sidE}}$$

Erdenjahr einsetzen

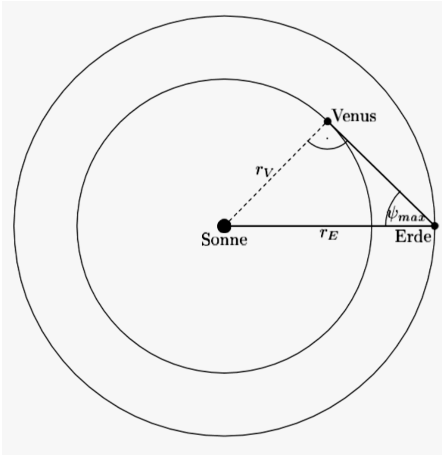
$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{1a}$$

Elementarumformung

$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{1a} + \frac{1}{T_{syn}}$$

Fertig.

Nach den Umlaufzeiten sind die Bahnradien zu messen:

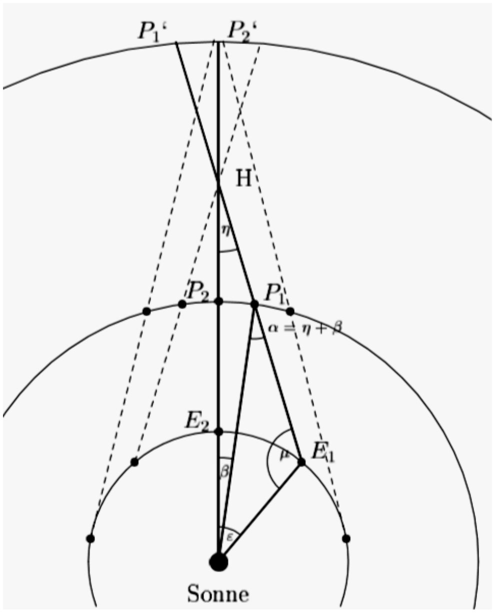


Für einen inneren Planeten ist der Bahnradius einfach zu bestimmen: Man beobachtet den Planeten so lange, bis sein Winkelabstand zur Sonne den größten Wert ψ_{max} annimmt. Zu dieser Zeit bilden Sonne, innerer Planet (beispielsweise hier die Venus) und Erde folgende Konstellation →

Man beachte, dass die Verbindung Erde – Venus an dieser Extremstelle die Tangente an die Venusbahn bildet und daher gilt (Sonne – Venus) ⊥ (Erde – Venus). Damit gilt

$$r_v = r_E \cdot \sin(\psi_{max})$$

Die Berechnung des Durchmessers der Erdbahn r_E erfolgt übrigens mit hoher Genauigkeit mittels Venustransit[27].



Bei äußeren Planeten ist die Messung des Bahnradius schwieriger. Die einfachste Methode besteht darin, die Position des Planeten am Tage seiner Opposition zu bestimmen und eine weitere Position während seiner Rückläufigkeit. Hat der Planet zwischen diesen beiden Beobachtungen am Himmel den Winkel η überstrichen, dann ergibt sich der Bahnradius wie folgt:

Dem Dreieck S P_1 H entnimmt man mittels des Hilfswinkels γ an P_1

$$\gamma = 180° - \eta - \beta$$

$$\alpha = 180° - \gamma$$

Und damit

$$\alpha = \eta + \beta$$

Dem Dreieck S E_1 H entnimmt man[28]

$$\mu + \eta + \varepsilon = 180°$$

Damit ergibt sich mittels Sinussatz

$$\frac{r_P}{\sin \mu} = \frac{r_E}{\sin \alpha}$$

Einsetzen

$$\frac{r_P}{\sin(180° - (\eta + \varepsilon))} = \frac{r_E}{\sin(\eta + \beta)}$$

Wegen sin(180° – φ) = sin(φ)

$$\frac{r_P}{\sin(\eta + \varepsilon)} = \frac{r_E}{\sin(\eta + \beta)}$$

Elementarumformung

$$\frac{r_P}{r_E} = \frac{\sin(\eta + \varepsilon)}{\sin(\eta + \beta)}$$

---

[27] Siehe dazu https://de.wikipedia.org/wiki/Venustransit , letzter Zugriff 29.12.2019. Eine ausführliche Beschreibung des letzten derartigen Ereignisses findet man in Venustransit2012(MNU_02_14_68-73).pdf .
[28] Vorsicht: Schreibfehler im Originaltext!

Die Winkel β und ε kann man nicht direkt messen. Man kann sie aber aus der siderischen Umlaufzeit des Planeten, der Jahreslänge und der zwischen den beiden Beobachtungen verflossenen Zeit Δt bestimmen:

$$\beta = \frac{360°}{T_{sid}} \Delta t$$

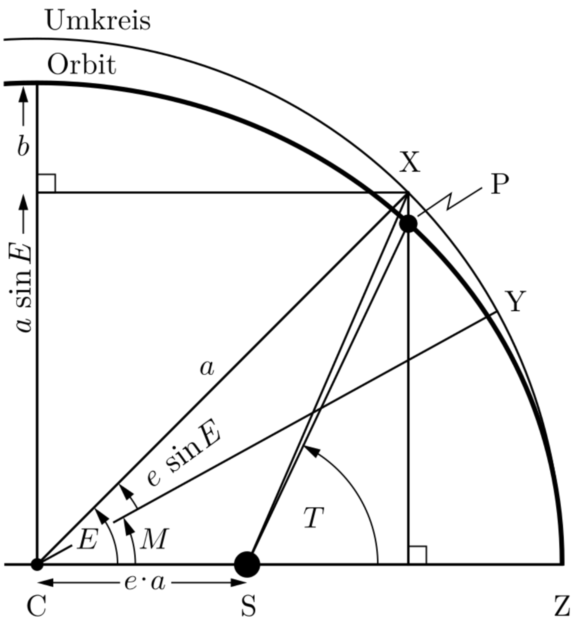
$$\varepsilon = \frac{360°}{1a} \Delta t$$

Damit sind auch die Bahnradien der Außenplaneten bestimmt.

10. Die Kepler – Gleichung

Die Kepler – Gleichung[29] ist eine transzendente Gleichung zur Berechnung elliptischer Bahnen von Himmelskörpern. Sie ergibt sich aus den ersten beiden keplerschen Gesetzen, die Johannes Kepler 1609 publizierte, und lautet

$$M = E - e \sin(E)$$



Mit den Bedeutungen

Längen:
a : große Halbachse
b : kleine Halbachse
e · a : lineare Exzentrizität

Punkte:
C : Mittelpunkt
S : Brennpunkt
Z : Periapsis
P : Objekt
X : Hilfspunkt zum Objekt
Y : fiktives Objekt

Winkel (alle Winkel im Bogenmaß):
T : wahre Anomalie
E : exzentrische Anomalie
M : mittlere Anomalie

Mittlere Anomalie

Die gleichmäßig vergehende Zeit lässt sich mit der Bewegung eines fiktiven Körpers Y auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gleichsetzen. Hierfür wird ein „Umkreis“ als Hilfskreis, auf dem Y umläuft, um die Kepler – Ellipse (also den Orbit, die Umlaufbahn des echten Planeten) gelegt. Zum Zeitpunkt t_P seien sowohl Y wie das wahre Objekt P als in der Periapsis Z stehend angenommen. Beide Punkte haben dieselbe Umlaufzeit und stehen bei jedem ganzzahligen Vielfachen in der Periapsis und bei jedem halbzahligen in der Apoapsis (zusammen).

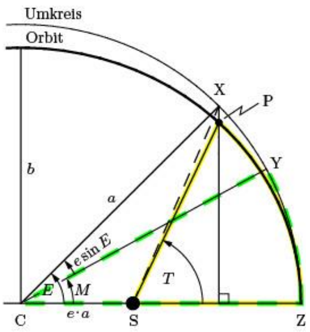
Die momentane Lage des Punktes Y wird als Winkel im Hilfskreis- (und Ellipsen-) Mittelpunkt C im Bezug zur Periapsis Z angegeben und als mittlere Anomalie M bezeichnet:

$$M = 2\,\pi\,\frac{t - t_p}{U}$$

Gl 10.1

Dabei ist U die Bahnperiode und 2π/U die mittlere Winkelgeschwindigkeit. Im Zeitpunkt t_P befindet sich das Himmelsobjekt in der Periapsis, wo es den geringsten Abstand zu seinem Schwerezentrum S hat.

[29] Aus https://de.wikipedia.org/wiki/Kepler-Gleichung , letzter Zugriff 15.01.2021.



Gemäß dem zweiten keplerschen Gesetz überstreicht der Fahrstrahl $\overline{SP}$ des Körpers P im gleichen Zeitabschnitt die gleiche Fläche. Da der Zeitanteil (am Umlauf) proportional ist zum Anteil des Kreissektors am Umkreis, ist der Anteil der elliptischen Teilfläche SPZ an der Ellipse gleich groß wie der des Kreissektors CYZ am Umkreis:

$$\frac{area(CYZ)}{area(SPZ)} = \frac{\pi\, a^2}{\pi\, a\, b} = \frac{a}{b}$$

Gl 10.2

Dabei ist a die große Halbachse der Ellipse und gleichzeitig der Radius des Umkreises, b die kleine Halbachse der Ellipse. Ellipse und Umkreis sind im Verhältnis b/a affin zueinander, d. h., die Ellipse ist in jeder Parallele zur kleinen Halbachse der mit diesem Verhältnis „gestauchte" Umkreis.

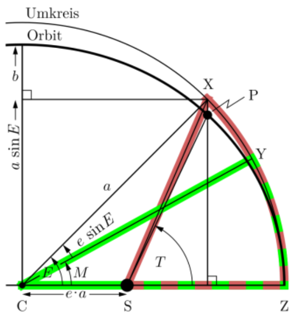
Exzentrische Anomalie

Durch eine zur kleinen Halbachse parallele Projektion des Punktes P auf den Umkreis entsteht der Hilfspunkt X, dessen Winkel im Mittelpunkt C zur Periapsis Z von Kepler exzentrische Anomalie E genannt wurde. Die Affinität begründet folgenden Zusammenhang:

$$area(SXZ) = \frac{a}{b}\, area(SPZ)$$

Gl 10.3

Einsetzen von 10.2 in 10.3 ergibt



$$area(SXZ) = area(CYZ)$$

Gl 10.4

Keplergleichung

Mit der Gleichung 10.4 ist die gesuchte, das zweite keplersche Gesetz erfüllende Beziehung zwischen der exzentrischen Anomalie X und der mittleren Anomalie Y implizit gefunden. Eine explizite Beziehung ergibt sich durch folgende Schritte:

Wenn der Fahrstrahl $\overline{CY}$ in einer Periode U den Winkel 2π zurücklegt und die Fläche π a^2 überstreicht, so überstreicht er bis zum Zeitpunkt t den Winkel M und eine um den Faktor M/2π kleinere Fläche:

$$area(CYZ) = \frac{M}{2\pi} \cdot \pi\, a^2 = \frac{a^2}{2} M$$

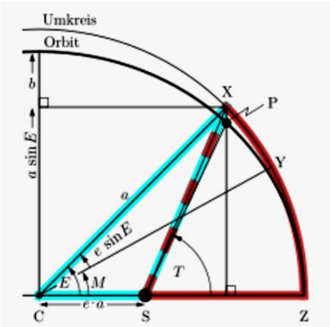
Gl 10.5

Die analoge Betrachtung für den Fahrstrahl $\overline{CX}$ über den Winkel E ergibt:

$$area(CXZ) = \frac{a^2}{2} E$$

Gl 10.6

Die Fläche CXZ besteht aus den Teilflächen CXS und SXZ:



zu Gleichung (7)

$$area(CXZ) = area(CXS) + area(SXZ)$$

Gl 10.7

Die Teilfläche CXS (hellblau umrandet in der Abbildung) ist ein geradlinig begrenztes Dreieck mit der Basis e · a und der Höhe a·sin(E):

$$area(CXS) = \frac{e \cdot a \ \cdot a \cdot sin(E)}{2} = \frac{a^{\,2}}{2} e \cdot sin(E)$$

Gl 10.8

e ist dabei die numerische Exzentrizität der Ellipse und e · a die lineare Exzentrizität, die den Abstand zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt angibt. Es gilt

$$e \cdot a = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Die Teilfläche SXZ ist nach Gleichung 10.4 gleich groß wie die Fläche CYZ, deren Wert in Gleichung 10.5 angegeben ist. Durch Einsetzen der Gleichungen 10.6, 10.8 und 10.5 wird aus Gleichung 10.7

$$\frac{a^2}{2} E = \frac{a^{\,2}}{2} e \cdot sin(E) + \frac{a^2}{2} M$$

Kürzen

$$E = e \cdot sin(E) + M$$

Gl 10.9

Das ist die gesuchte Kepler – Gleichung. Diese ist in geschlossener Form nach der exzentrischen Anomalie E(t) nicht lösbar.

Üblicherweise interessiert man sich für den Wert der exzentrischen Anomalie E(t) als Funktion der Zeit ab dem Perihel – Durchgang

$$M(t) = 2\,\pi\,\frac{t - t_p}{U}$$

Ein stabiles Berechnungsverfahren beruht auf dem banachschen Fixpunktsatz:

$$E_0 = M;\ E_{n+1} = e \cdot sin(E_n) + M$$

Gl 10.10

Zur Erinnerung:

Zum Zeitpunkt t_P stehen sowohl Y wie das wahre Objekt P in der Periapsis Z.
t ist der Zeitpunkt für den die Position von P berechnet werden soll.
U die Bahnperiode oder siderische Umlaufzeit des Planeten.
E ist die exzentrische Anomalie, also der Winkel des Hilfspunktes X von C aus gesehen.

Interessant ist aber eigentlich der tatsächliche Ort von P, der sich aus der wahren Anomalie T(t) und der Länge des Fahrstrahls r ergibt.

$$T(t) = \arccos\left(\frac{a\cos\big(E(t)\big) - \ a\,e}{a - \ a\,\mathrm{e}\cos\big(E(t)\big)}\right) = \arccos\left(\frac{\cos\big(E(t)\big) - \ e}{1 - \ \mathrm{e}\cos\big(E(t)\big)}\right)$$

Gl 10.11

Dabei ist die Unterscheidung $0 \le E \le \pi$ und $\pi \le E \le 2\pi$ erforderlich.

Der Nenner des Ausdrucks ist bereits der Abstand von P zu S:

$$r = a - a\,\mathrm{e}\cos\big(E(t)\big) \tag{Gl 10.12}$$

Wie kommt man auf das?

Der Fußpunkt F von X und P ist

$$F = \mathrm{a} \cdot \cos(\mathrm{E}) \tag{Gl 10.13}$$

Damit ergibt sich der Abstand zwischen dem Brennpunkt S und dem Fußpunkt F zu

$$\overleftarrow{S\,F} = \mathrm{a} \cdot \cos(\mathrm{E}) - \mathrm{a\,e} \tag{Gl 10.14}$$

Das ist aber bereits die Länge der Ankathete des Dreiecks SPF. Der y – Wert von P ist aufgrund der Affinität aber gleich dem y – Wert von X mal den Stauchungsfaktor b/a.

Der y – Wert von X ist aber

$$y(X) = \mathrm{a} \cdot \sin(\mathrm{E})$$

und daher

$$y(P) = \mathrm{b} \cdot \sin(\mathrm{E}) \tag{Gl 10.15}$$

Der Wert b ist aber in diesem Zusammenhang unhandlich

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Daher

$$y(P) = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin(\mathrm{E})$$

Das ist aber die Gegenkathete des Dreiecks SPF. Die Länge der Hypotenuse ergibt sich nach Pythagoras zu

$$r^2 = (\mathrm{a} \cdot \cos(\mathrm{E}) - \mathrm{a\,e})^2 + \left(a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin(\mathrm{E})\right)^2$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,(\cos(\mathrm{E}) - \mathrm{e})^2 + \mathrm{a}^2\left(\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin(\mathrm{E})\right)^2$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,(\cos^2(\mathrm{E}) - 2\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E}) + \mathrm{e}^2) + \mathrm{a}^2\big((1 - e^2) \cdot \sin^2(\mathrm{E})\big)$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,(\cos^2(\mathrm{E}) - 2\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E}) + \mathrm{e}^2) + \mathrm{a}^2\big(\sin^2(\mathrm{E}) - e^2\sin^2(\mathrm{E})\big)$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,\big(\cos^2(\mathrm{E}) - 2\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E}) + \mathrm{e}^2 + \sin^2(\mathrm{E}) - e^2\sin^2(\mathrm{E})\big)$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,\big(1 - 2\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E}) + \mathrm{e}^2 - e^2\sin^2(\mathrm{E})\big)$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,(1 - 2\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E}) + \mathrm{e}^2(1 - \sin^2(\mathrm{E})))$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,\big(1 - 2\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E}) + \mathrm{e}^2\cos^2(\mathrm{E})\big)$$

$$r^2 = \mathrm{a}^2\,\big(1 - \mathrm{e}\cos(\mathrm{E})\big)^2$$

$$r = \mathrm{a}\left(1 - \mathrm{e}\cos(\mathrm{E})\right) = \ \mathrm{a} - \mathrm{a}\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E})$$

Gl 10.16

Damit ist Gl 10.11 abgeleitet.

Zusammenfassung: Gegeben sei die Zeit nach dem Perihel $t - t_p$. Daraus ergibt sich die mittlere Anomalie M(t) zu

$$M(t) = 2\,\pi\,\frac{t - \ t_p}{U}$$

Die Lösung der Kepler – Gleichung mittels Fixpunksatz führt zur exzentrischen Anomalie E(t)

$$E(t) = e \cdot sin(E(t)) + M(t)$$

Die Länge des Fahrstrahls r(t) ergibt sich zu

$$r(t) = \ \mathrm{a} - \mathrm{a}\,\mathrm{e}\cos(\mathrm{E(t)})$$

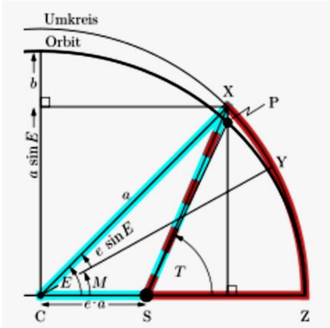
Und die wahre Anomalie T(t), also der Winkel von P, vom Brennpunkt aus gesehen zu

$$T(t) = \arccos\left(\frac{\cos\left(E(t)\right) - \ e}{1 - \ \mathrm{e}\cos\left(E(t)\right)}\right)$$

Gl 10.17

Damit ist die Position von P, vom Brennpunkt aus gesehen, in Polarkoordinaten bestimmt.

11. Die Berechnung der Bahngeschwindigkeit



Kommen wir nun zur Berechnung der Bahngeschwindigkeit v(t) an der Stelle r(t).

e ist die numerische Exzentrizität der Ellipse und e · a die lineare Exzentrizität, die den Abstand zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt angibt. Es gilt

$$e \cdot a = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Gegeben sei die Zeit nach dem Perihel $t - t_p$. Daraus ergibt sich die mittlere Anomalie M(t) zu

$$M(t) = 2\,\pi\,\frac{t - t_p}{U}$$

Die Lösung der Kepler – Gleichung mittels Fixpunktsatz führt zur exzentrischen Anomalie E(t)

$$E(t) = e \cdot sin(E(t)) + M(t)$$

Die Länge des Fahrstrahls r(t) ergibt sich zu

$$r(t) = \mathrm{a} - \mathrm{a\,e}\cos(\mathrm{E(t)})$$

Und die wahre Anomalie T(t), also der Winkel von P, vom Brennpunkt aus gesehen zu

$$T(t) = \arccos\left(\frac{\cos\big(E(t)\big) - e}{1 - \mathrm{e}\cos\big(E(t)\big)}\right)$$

Gl 10.17

Daher können wir Gl 10.16 nach E(t) umstellen

$$r(t) = \mathrm{a} - \mathrm{a\,e}\cos(\mathrm{E(t)})$$

$$\frac{a - r(t)}{\mathrm{a\,e}} = \cos(\mathrm{E(t)})$$

$$\mathrm{E(t)} = \arccos\left(\frac{a - r(t)}{a\,e}\right)$$

Gl 11.01

Die folgende Berechnung beziehen wir nun auf r, um zu analytischen Formeln zu kommen:

$$\mathrm{E(r)} = \arccos\left(\frac{a - r}{a\,e}\right)$$

$$T(r) = \arccos\left(\frac{\cos\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)\right) - e}{1 - \mathrm{e}\cos\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)\right)}\right)$$

$$T(r) = \arccos\left(\frac{\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e}{1 - e\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)}\right)$$

$$T(r) = \arccos\left(\frac{\frac{a-r-ae^2}{a\,e}}{\frac{a-a+r}{a}}\right)$$

$$T(r) = \arccos\left(\frac{a-r-a\,e^2}{e\,r}\right)$$

Gl 11.02

und schließlich

$$\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) = e \cdot sin\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)\right) + M(r)$$

$$M(r) = \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot sin\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)\right)$$

$$M(r) = \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot \left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)$$

$$\frac{2\,\pi}{U}\left(t - t_p\right) = \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot \left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)$$

$$t(r) = \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot \left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right) + t_p$$

Gl 11.03

Damit sind t und T als analytische Funktionen von r dargestellt.

Wir vereinfachen nun mit $t_p = 0$. U ergibt sich aus dem dritten Keplerschen Gesetz[30]

$$\frac{4\pi^2}{G \cdot M} = \frac{U^2}{a^3}$$

$$U^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G \cdot M}$$

$$U = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G \cdot M}}$$

Gl 11.04

[30] Achtung: Gerade hier wirkt sich die Inkonsistenz der Symbolik böse aus!

Damit ergibt sich für t(r)

$$t(r) \;= \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G\cdot M}}}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(r) \;= \sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

Gl 11.05

Des Weiteren wählen wir für die Berechnung r als linear steigendes Argument:

$$(a - a\,e) \le r \le (a + a\,e)$$

Damit überstreicht r die obere Halbellipse.

Die Radialgeschwindigkeit ist die Änderung des Bahnradius mit der Zeit

$$v_r(r) = \frac{d\,r}{d\,t(r)}$$

Gl 11.06

Formal ist das der Kehrwert der Ableitung von t(r) nach r

$$v_r(r) = \frac{1}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}$$

Gl 11.07

Konkret daher

$$t(r) \;= \sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

$$\frac{d\,t(r)}{d\,r} \;= \sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\left(\frac{1}{a\,e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}} - e\cdot\left(\frac{a-r}{a^2e^2\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}\right)\right)$$

$$\frac{d\,t(r)}{d\,r} \;= \sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\left(\frac{a}{a^2e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}} - \frac{a-r}{a^2e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}\right)$$

$$\frac{d\,t(r)}{d\,r} \;= \sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\cdot\left(\frac{r}{a^2e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}\right)$$

$$v_r(r) = \frac{1}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\cdot\left(\frac{r}{a^2 e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}\right)}$$

$$v_r(r) = \frac{a\,e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G\cdot M}}}$$

Gl 11.08

Die zeitliche Änderung der wahren Anomalie T(t) entspricht der Winkelgeschwindigkeit ω in Bezug auf das Gravitationszentrum S. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit beträgt daher für kleine Winkeländerungen

$$v_\perp(r) = r\cdot\frac{d\,T(r)}{d\,t(r)}$$

$$T(r) = \arccos\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r}\right)$$

$$t(r) \;= t(r) \;= \sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

Was die richtigen Mathematiker wohl dazu sagen:

$$v_\perp(r) = \; r\cdot\frac{d\,T(r)}{d\,t(r)} = r\cdot\frac{\frac{d\,T(r)}{d\,r}}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}$$

Gl 11.09

$$T(r) = \arccos\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r}\right)$$

$$\frac{d\,T(r)}{d\,r} = \frac{\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r}\right)^2}}$$

$$v_\perp(r) = \; r\cdot\frac{\frac{d\,T(r)}{d\,r}}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}} = r\cdot\frac{\frac{\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r}\right)^2}}}{\sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}\cdot\left(\frac{r}{a^2 e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}\right)}$$

$$v_\perp(r) = r\cdot\frac{\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r^2}+\frac{1}{e\,r}\right)\left(a^2 e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)}{r\sqrt{1-\left(\frac{a-r-\,a\,e^2}{e\,r}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{\left(\frac{a-r-a\,e^2}{e\,r^2} + \frac{r}{e\,r^2}\right)\left(a^2 e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a-r-a\,e^2}{e\,r}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{G\cdot M}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{(a-a\,e^2)\left(a\sqrt{\frac{a^2\,e^2-(a-r)^2}{a^2\,e^2}}\right)}{r^2\sqrt{\frac{e^2\,r^2-(a-r-a\,e^2)^2}{e^2\,r^2}}\cdot\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{(a-a\,e^2)\left(\frac{a}{a\,e}\sqrt{a^2\,e^2-(a^2-2\,a\,r+r^2)}\right)}{\frac{r^2}{e\,r}\sqrt{e^2\,r^2-(a-r-a\,e^2)^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{(a-a\,e^2)\left(\frac{1}{e}\sqrt{a^2\,e^2-(a^2-2\,a\,r+r^2)}\right)}{\frac{r}{e}\sqrt{e^2\,r^2-(a-r-a\,e^2)^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{a\,(1-e^2)\left(\sqrt{a^2\,e^2-a^2+2\,a\,r-r^2}\right)}{r\sqrt{e^2\,r^2-(a-r-a\,e^2)^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

Gl 11.10

Für die Bahngeschwindigkeit oder Orbitalgeschwindigkeit v(t) folgt damit

$$(v(r))^2 = (v_\perp(r))^2 + (v_r(r))^2$$

Gl 11.11

$$(v(r))^2 = \left(\frac{a\,(1-e^2)\left(\sqrt{a^2\,e^2-a^2+2\,a\,r-r^2}\right)}{r\sqrt{e^2\,r^2-(a-r-a\,e^2)^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}\right)^2 + \left(\frac{a\,e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G\cdot M}}}\right)^2$$

$$(v(r))^2 = \left(\frac{a^2(1-e^2)^2\,(a^2\,e^2-a^2+2\,a\,r-r^2)}{r^2(e^2\,r^2-(a-r-a\,e^2)^2)\cdot\left(\frac{a}{G\cdot M}\right)}\right) + \left(\frac{a^2e^2\left(1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2\right)}{\frac{a\,r^2}{G\cdot M}}\right)$$

$$(v(r))^2 = G\cdot M\cdot\left(\left(\frac{a^2(1-e^2)^2(a^2e^2-a^2+2\,a\,r-r^2)}{a\,r^2\,(e^2\,r^2-(a^2-2\,a\,r-2\,a^2e^2+r^2+2\,a\,r\,e^2+a^2e^4))}\right) + \frac{a^2e^2\left(1-\left(\frac{a^2-2\,a\,r+r^2}{a^2e^2}\right)\right)}{a\,r^2}\right)$$

$$(v(r))^2 = G\cdot M\cdot\left(\frac{a\,(1-e^2)^2\,(a^2e^2-a^2+2\,a\,r-r^2)}{r^2\,(e^2\,r^2-a^2+2\,a\,r+2\,a^2\,e^2-r^2-2\,a\,r\,e^2-a^2\,e^4)} + \frac{a\,e^2\left(\frac{a^2\,e^2}{a^2\,e^2}-\frac{a^2-2\,a\,r+r^2}{a^2\,e^2}\right)}{r^2}\right)$$

$$(v(r))^2 = G\cdot M\cdot\left(\frac{a\,(1-e^2)^2(a^2e^2-a^2+2\,a\,r-r^2)}{r^2\,(e^2\,r^2-a^2+2\,a\,r+2\,a^2e^2-r^2-2\,a\,r\,e^2-a^2e^4)} + \frac{a\,e^2\left(\frac{a^2e^2-a^2+2\,a\,r-r^2}{a^2e^2}\right)}{r^2}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{a}{r^2} \frac{(1-\ e^2)^2\ (\ a^2e^2 - a^2 + 2\ a\ r - r^2)}{(1-\ e^2)\ (\ a^2e^2 - a^2 + 2\ a\ r - r^2)} + \frac{(a^2e^2 - a^2 + 2\ a\ r - r^2)}{a\ r^2}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{a\ (1-\ e^2)}{r^2} + \frac{(a^2e^2 - a^2 + 2\ a\ r - r^2)}{a\ r^2}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{a^2\ (1-\ e^2) + (a^2e^2 - a^2 + 2\ a\ r - r^2)}{a\ r^2}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{a^2 -\ a^2\ e^2 + a^2e^2 - a^2 + 2\ a\ r - r^2}{a\ r^2}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2\ a\ r - r^2}{a\ r^2}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2\ a - r}{a\ r}\right)$$

$$\left(v(r)\right)^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2\ a}{a\ r} - \frac{r}{a\ r}\right)$$

$$(v(r))^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Gl 11.12

Stimmt!

Damit ist die Bahngeschwindigkeit aus der Kepler – Gleichung abgeleitet.

12. Die Berechnung des Ortes

Zum Abschluss dieses Aufsatzes versuchen wir, aus der Bahngeschwindigkeit den Ort zu berechnen, also den umgekehrten Weg zu gehen wie in Kapitel 11.

Zur Vereinfachung gilt wieder der Bezugspunkt der Zeit im Perihel – Durchgang $t_p = 0$.

Als Quellen verwenden wir die Formel für die Bahngeschwindigkeit v(r) als Funktion der Länge des Fahrstrahls r

$$(v(r))^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

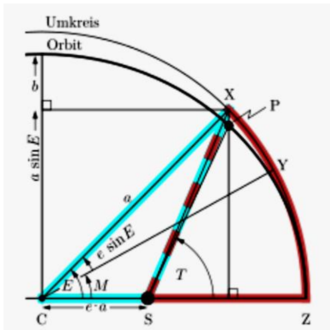
Gl 11.12

Dazu die orthogonale Zusammensetzung der Bahngeschwindigkeit

$$(v(r))^2 = (v_\perp(r))^2 + (v_r(r))^2$$

Gl 11.11

Wir kennen



a	die große Halbachse der Ellipse
e · a	die lineare Exzentrizität oder Brennweite
$U = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G \cdot M}}$	die Umlaufzeit

Gesucht ist die wahre Anomalie T(t), also der Winkel von P, vom Brennpunkt aus gesehen, zum Zeitpunkt t nach dem Perihel – Durchgang.

Die Ellipsengleichung (Brennpunktlage F1 (-2ea,0), S (0,0), C (-ea,0)) lautet daher

$$\frac{(x + e \cdot a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

Explizit

$$\frac{(x + e \cdot a)^2(1 - e^2)}{a^2(1 - e^2)} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$(x + e \cdot a)^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$y^2 = a^2(1 - e^2) - (x + e \cdot a)^2(1 - e^2)$$

$$y^2 = (1 - e^2)\,(a^2 - (x + e \cdot a)^2)$$

$$y = \sqrt{(1 - e^2)\,(a^2 - (x + e \cdot a)^2)}$$

Gl 12.01

Der Punkt P habe die Koordinaten (p,q).

Die Länge des Fahrstrahls r ergibt sich zu

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{p^2 + (1 - e^2)\,(a^2 - (p + e \cdot a)^2)}$$

$$r = \sqrt{p^2 + (1 - e^2)\,(a^2 - (p^2 + 2\,p\,e\,a + e^2\,a^2))}$$

$$r = \sqrt{p^2 + (1-e^2)\,(a^2 - e^2\,a^2 - p^2 - 2\,p\,e\,a)}$$

$$r = \sqrt{p^2 + (1-e^2)\,(a^2(1-e^2) - p^2 - 2\,p\,e\,a)}$$

$$r = \sqrt{p^2 + a^2(1-e^2)(1-e^2) - p^2(1-e^2) - 2\,p\,e\,a(1-e^2)}$$

$$r = \sqrt{p^2 + a^2(1-e^2)^2 - p^2 + p^2e^2 - 2\,p\,e\,a(1-e^2)}$$

$$r = \sqrt{a^2(1-e^2)^2 - 2\,p\,e\,a(1-e^2) + p^2e^2}$$

$$r^2 = (a(1-e^2) - pe)^2$$

$$r = a(1-e^2) - pe$$

Gl 12.02

Nun die Länge des Fahrstrahls r als Funktion der wahren Anomalie T. Offensichtlich gilt

$$p = (r \cdot \cos(T))$$

$$r = a(1-e^2) - (e\,r \cdot \cos(T))$$

$$(e\,r \cdot \cos(T)) = a(1-e^2) - r$$

$$\cos(T(r)) = \frac{a\,(1-e^2) - r}{e\,r}$$

$$T(r) = arccos\left(\frac{a\,(1-e^2) - r}{e\,r}\right)$$

Gl 12.03

Das ist die Gl 11.02. Offenbar sind wir auf den richtigen Weg.

Wir wissen die Formel für die Orthogonalgeschwindigkeit

$$v_\perp(r) = r \cdot \frac{d\,T(r)}{d\,t(r)} = r \cdot \frac{\frac{d\,T(r)}{d\,r}}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}$$

Gl 11.09

und die Radialgeschwindigkeit

$$v_r(r) = \frac{1}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}$$

Gl 11.07

Einsetzen

$$(v(r))^2 = (v_\perp(r))^2 + (v_r(r))^2$$

Gl 11.11

$$\left(G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\right)=\left(r\cdot\frac{\frac{d\,T(r)}{d\,r}}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}\right)^2$$

Jetzt brauchen wir die Ableitung der wahren Anomalie nach dem Fahrstrahl

$$\frac{d\,T(r)}{d\,r}=\frac{\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}}$$

Einsetzen

$$\left(G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\right)=\left(r\cdot\frac{\frac{\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}}}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}\right)^2$$

Und jetzt schauen, ob man das nach der Änderung des Bahnradius mit der Zeit umstellen kann. Zur Vereinfachung der Formel nennen wir vorübergehend und willkürlich

$$s=\frac{d\,t(r)}{d\,r}$$

und erhalten damit

$$G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)=\left(r\cdot\frac{\frac{\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}}}{s}\right)^2+\left(\frac{1}{s}\right)^2$$

$$G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{1}{s^2}\right)=\left(r\cdot\frac{\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{s\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}}\right)^2$$

$$G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{1}{s^2}\right)=\left(r\cdot\frac{\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r^2}+\frac{r}{e\,r^2}}{s\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}}\right)^2$$

$$G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{1}{s^2}\right)=\left(r\cdot\frac{\frac{a(1-e^2)}{e\,r^2}}{s\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}\right)}\right)^2$$

$$G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{1}{s^2}\right)=r^2\cdot\frac{\frac{a^2(1-e^2)^2}{e^2\,r^4}}{s^2\cdot\left(1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2\right)}$$

$$G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{\frac{a^2(1-e^2)^2}{e^2\, r^2}}{s^2 \cdot \left(\frac{e^2\, r^2}{e^2\, r^2} - \frac{a^2(1-e^2)^2 - 2\, a\, r(1-e^2) + r^2}{e^2\, r^2}\right)}$$

$$G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{\frac{a^2(1-e^2)^2}{e^2\, r^2}}{s^2 \cdot \left(\frac{e^2\, r^2 - a^2(1-e^2)^2 + 2\, a\, r(1-e^2) - r^2}{e^2\, r^2}\right)}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - 1 = \frac{\frac{a^2(1-e^2)^2}{e^2\, r^2}}{\frac{e^2\, r^2 - a^2(1-e^2)^2 + 2\, a\, r(1-e^2) - r^2}{e^2\, r^2}}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - 1 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{-a^2(1-e^2)^2 + 2\, a\, r(1-e^2) - r^2 + e^2\, r^2}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - 1 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{-a^2(1-e^2)^2 + 2\, a\, r(1-e^2) - r^2(1-e^2)}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - 1 = \frac{a^2(1-e^2)}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{a^2(1-e^2)}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2} + 1$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{a^2(1-e^2)}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2} + \frac{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{a^2(1-e^2) - a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2\, a\, r - r^2}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{r(2\, a - r)}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}$$

$$G \cdot M \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2a - r}{ra}\right) = \frac{r(2\, a - r)}{-a^2(1-e^2) + 2\, a\, r - r^2}$$

$$s^2 = \frac{r(2\, a - r)}{G \cdot M \cdot \left(\frac{2a-r}{ra}\right)(a^2(e^2 - 1) + 2\, a\, r - r^2)}$$

$$s^2 = \frac{a\, r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2 - 1) + 2\, a\, r - r^2)}$$

$$s = \sqrt{\frac{a\, r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2 - 1) + 2\, a\, r - r^2)}}$$

Rückbenennen

$$\frac{d\,t(r)}{d\,r} = \sqrt{\frac{a\,r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}}$$

Gl 12.03

Auf die Radialgeschwindigkeit umrechnen

$$v_r(r) = \frac{1}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}$$

$$v_r(r) = \sqrt{\frac{1}{\frac{a\,r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}$$

$$v_r(r) = \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}{a\,r^2}}$$

Jetzt müssen wir noch beweisen, ob diese Formel mit der aus der früheren Berechnung übereinstimmt:

$$v_r(r) = \frac{a\,e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G \cdot M}}}$$

Gl 11.08

$$\frac{a\,e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G \cdot M}}} = \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}{a\,r^2}}$$

$$\frac{\sqrt{(a^2e^2)\left(1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2\right)}}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G \cdot M}}} = \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}{a\,r^2}}$$

$$\frac{(a^2e^2)\left(1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2\right)}{\frac{a\,r^2}{G \cdot M}} = \frac{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}{a\,r^2}$$

$$\frac{G \cdot M(a^2e^2)\left(1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2\right)}{a\,r^2} = \frac{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}{a\,r^2}$$

$$G \cdot M(a^2e^2)\left(1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2\right) = G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)$$

$$(a^2e^2)\left(\frac{a^2\,e^2}{a^2\,e^2} - \frac{a^2 - 2\,a\,r + r^2}{a^2\,e^2}\right) = a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2$$

$$(a^2 e^2)\left(\frac{a^2\,e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2}{a^2\,e^2}\right) = a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2$$

$$a^2\,e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2 = a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2$$

$$a^2\,e^2 - a^2 = a^2(e^2-1)$$

Stimmt. Damit sind wir noch immer in Übereinstimmung mit den Formeln aus Kapitel 11.

Als nächstes müssen wir die Orthogonalgeschwindigkeit explizit darstellen

$$v_\perp(r) = r\cdot\frac{\frac{d\,T(r)}{d\,r}}{\frac{d\,t(r)}{d\,r}}$$

Gl 11.09

Einsetzen

$$v_\perp(r) = r\cdot\frac{\frac{\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r^2}\right)+\left(\frac{1}{e\,r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)-r}{e\,r}\right)^2}}}{\sqrt{\frac{a\,r^2}{G\cdot M\cdot(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}$$

$$v_\perp(r) = r\cdot\frac{\frac{a(1-e^2)}{e\,r^2}}{\sqrt{\frac{e^2\,r^2}{e^2\,r^2}-\frac{a^2(1-e^2)^2-2\,a\,r(1-e^2)+r^2}{e^2\,r^2}}\sqrt{\frac{a\,r^2}{G\cdot M\cdot(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{\frac{a(1-e^2)}{e\,r}}{\sqrt{\frac{e^2\,r^2-a^2(1-e^2)^2+2\,a\,r(1-e^2)-r^2}{e^2\,r^2}}\sqrt{\frac{a\,r^2}{G\cdot M\cdot(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{a(1-e^2)}{r\sqrt{e^2\,r^2-a^2(1-e^2)^2+2\,a\,r(1-e^2)-r^2}\sqrt{\frac{a}{G\cdot M\cdot(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{a(1-e^2)}{r\sqrt{\frac{e^2\,r^2-a^2(1-e^2)^2+2\,a\,r(1-e^2)-r^2}{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

$$v_\perp(r) = \frac{a(1-e^2)(\sqrt{a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2})}{r\sqrt{e^2\,r^2-a^2(1-e^2)^2+2\,a\,r(1-e^2)-r^2}\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

Das lassen wir mal so stehen.

Probe, ob dieser Ausdruck mit der Gl 11.10 identisch ist

$$v_\perp(r) = \frac{a\,(1-\;e^2)\left(\sqrt{a^2\,e^2-a^2+2\,a\,r-r^2}\right)}{r\sqrt{e^2\,r^2\;-(a-r-\;a\,e^2)^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}}$$

Zählerausdruck, r im Nenner und die rechte Wurzel im Nenner sind identisch, daher brauchen wir nur mehr die Identität des linken Wurzelausdrucks im Nenner zu beweisen:

$$e^2\, r^2 - a^2(1-e^2)^2 + 2\, a\, r(1-e^2) - r^2 = e^2\, r^2\ - (a - r - \ a\, e^2)^2$$

$$a^2(1-e^2)^2 - 2\, a\, r(1-e^2) + r^2 = (a(1-\ e^2) - r)^2$$

$$a^2(1-e^2)^2 - 2\, a\, r(1-e^2) + r^2 = a^2(1-\ e^2)^2 - 2\, a\, r(1-\ e^2) + r^2$$

Das stimmt auch.

Status: Bahngeschwindigkeit, Radialgeschwindigkeit und Orthogonalgeschwindigkeit sind nun explizit berechnet.

Als nächsten Schritt berechnen wir die Zeit t als Funktion der Länge des Fahrstrahls r. Bereits berechnet haben wir

$$\frac{d\, t(r)}{d\, r} = \sqrt{\frac{a\, r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\, a\, r - r^2)}}$$

Gl 12.03

Das Ergebnis aus Kapitel 11 lautet

$$t(r)\ = \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}} \left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\, e}\right) - e \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\, e}\right)^2} \right) \right)$$

Gl 11.05

Die Ableitung steht auf S.41

$$\frac{d\, t(r)}{d\, r} = \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}} \cdot \left(\frac{r}{a^2 e \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\, e}\right)^2}} \right)$$

Wir überprüfen, ob das stimmt

$$\sqrt{\frac{a\, r^2}{G \cdot M \cdot (a^2(e^2-1) + 2\, a\, r - r^2)}} = \sqrt{\frac{a}{G \cdot M}} \cdot \left(\frac{a\, r}{a^2 e \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\, e}\right)^2}} \right)$$

$$\frac{r}{\sqrt{(a^2(e^2-1) + 2\, a\, r - r^2)}} = \frac{r}{a\, e \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\, e}\right)^2}}$$

$$\sqrt{(a^2(e^2-1) + 2\, a\, r - r^2)} = a\, e \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\, e}\right)^2}$$

$$(a^2 e^2 - a^2 + 2\, a\, r - r^2) = a^2\, e^2 \left(1 - \left(\frac{a^2 - 2\, a\, r + r^2}{a^2\, e^2} \right) \right)$$

$$a^2e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2 = a^2\,e^2\left(\frac{a^2\,e^2}{a^2\,e^2} - \frac{a^2 - 2\,a\,r + r^2}{a^2\,e^2}\right)$$

$$a^2e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2 = a^2\,e^2\left(\frac{a^2\,e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2}{a^2\,e^2}\right)$$

$$a^2e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2 = a^2\,e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2$$

Stimmt. Jetzt muss noch das Integral gelingen.

Zwecks Übersichtlichkeit den Vorfaktor herausziehen

$$\frac{d\,t(r)}{d\,r} = \sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}$$

Eine willkürliche Zwischenvariable einführen:

$$a^2(e^2-1) = \ b$$

Umbenennen

$$\frac{d\,y(x)}{d\,x} = \frac{x}{\sqrt{(b+2\,a\,x-x^2)}}$$

$$y(x) = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(b+2\,a\,x-x^2)}} + C$$

Nicht verzagen, WolframAlpha fragen

$$y(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2}{(b+2\,a\,x-x^2)}}\right)\left(-a\sqrt{(b+2\,a\,x-x^2)}\ \cdot\arctan\left(\frac{a-x}{\sqrt{(b+2\,a\,x-x^2)}}\right) - (b+2\,a\,x-x^2)\right)}{x} + C$$

Rückbenennen

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{r^2}{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right)\left(-a\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r)}\ \cdot\arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right) - (a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)\right)}{r} + C\right)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(\frac{-a\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r)}\ \cdot\arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right) - (a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}} + C\right)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(\frac{-a\ \cdot\arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right) - \sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}{1} + C\right)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(\left(-a\ \cdot\arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right) - \sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}\right) + C\right)$$

Die Ableitung dieser Gleichung überprüfen wir einmal mittels WolframAlpha

$$-\left(a \cdot \arctan\left(\frac{a-x}{\sqrt{(a^2(b^2-1)+2\,a\,x-x^2)}}\right)+\sqrt{(a^2(b^2-1)+2\,a\,x-x^2)}\right)'$$

$$-\left(-\frac{a}{\sqrt{(a^2(b^2-1)+2\,a\,x-x^2)}}+\frac{a-x}{\sqrt{(a^2(b^2-1)+2\,a\,x-x^2)}}\right)=\frac{x}{\sqrt{(a^2(b^2-1)+2\,a\,x-x^2)}}$$

Stimmt.

Als nächstes ist die Konstante C zu bestimmen. Dazu verwenden wir den Zeitpunkt $t(r) = 0$, an dem sich aus geometrischen Gründen

$$r = (a - a\,e)$$

ergibt.

$$0=\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(-a \cdot \arctan\left(\frac{a-(a-a\,e)}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,(a-a\,e)-(a-a\,e)^2)}}\right)-\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,(a-a\,e)-(a-a\,e)^2)}\right)+C$$

$$0=-a \cdot \arctan\left(\frac{a-a+a\,e}{\sqrt{a^2e^2-a^2+2\,a^2-2\,a^2\,e-a^2+2\,a^2\,e-a^2\,e^2}}\right)-\sqrt{a^2e^2-a^2+2\,a^2-2\,a^2\,e-a^2+2\,a^2\,e-a^2\,e^2}+C$$

$$0=-a \cdot \arctan\left(\frac{a\,e}{\sqrt{0}}\right)-0+C$$

Um das Rechnen mit Unendlich zu vermeiden, führen wir die Zwischenvariable k ein

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$C=a \cdot \arctan\left(\frac{a\,e}{k}\right)$$

Einsetzen

$$t(r)=\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(\left(-a \cdot \arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right)-\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}\right)+a \cdot \arctan\left(\frac{a\,e}{k}\right)\right)$$

Umstellen

$$t(r)=\sqrt{\frac{a}{G\cdot M}}\cdot\left(a\cdot\left(\arctan\left(\frac{a\,e}{k}\right)-\arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right)\right)-\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}\right)$$

So formuliert lässt sich das Additionstheorem für den Arkustangens anwenden

$$\arctan(x)+\arctan(y)=\arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right)$$

Da die Arkustangens – Funktion ungerade ist

$$\arctan(x)-\arctan(y)=\arctan\left(\frac{x-y}{1+x\,y}\right)$$

Zwischenrechnung

$$\arctan\left(\frac{a\,e}{k}\right) - \arctan\left(\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{a\,e}{k} - \frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}{1+\frac{a\,e}{k}\,\frac{a-r}{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{a\,e\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}{k\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}} - \frac{ak-rk}{k\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}{\frac{k\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}{k\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}} + \frac{a\,e(a-r)}{k\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{a\,e\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)} - ak + rk}{k\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)} + a\,e(a-r)}\right)$$

Da k eine Nullfolge ist

$$= \arctan\left(\frac{a\,e\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}{a\,e(a-r)}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}{(a-r)}\right)$$

Auf Arkuskosinus umrechnen

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Daher

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}}{(a-r)}\right)^2}}\right)$$

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(a^2(e^2-1)+2\,a\,r-r^2)}{(a^2-2\,a\,r+r^2)}}}\right)$$

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2\,a\,r+r^2}{a^2-2\,a\,r+r^2} + \frac{a^2\,e^2-a^2+2\,a\,r-r^2}{a^2-2\,a\,r+r^2}}}\right)$$

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2\,a\,r+r^2+a^2\,e^2-a^2+2\,a\,r-r^2}{(a-r)^2}}}\right)$$

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2\,e^2}{(a-r)^2}}}\right)$$

$$\arctan(x) = \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)$$

Einsetzen

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G \cdot M}} \cdot \left(a \cdot \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - \sqrt{(a^2(e^2-1) + 2\,a\,r - r^2)}\right)$$

Nachputzen

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G \cdot M}} \cdot \left(a \cdot \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - \sqrt{(a^2e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2)}\right)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{a}{G \cdot M}} \cdot \left(a \cdot \arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - a\,e\,\sqrt{\frac{a^2e^2 - a^2 + 2\,a\,r - r^2}{a^2e^2}}\right)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}} \cdot \left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot \sqrt{\frac{a^2e^2}{a^2e^2} - \frac{a^2 - 2\,a\,r + r^2}{a^2e^2}}\right)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}} \cdot \left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)$$

Das Ergebnis aus Kapitel 11 lautet

$$t(r) = \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

Gl 11.05

Damit ist Übereinstimmung erreicht.

Der nächste Schritt: Die wahre Anomalie T als Funktion des Fahrstrahls r kennen wir schon.

$$T(r) = arccos\left(\frac{a\,(1-e^2) - r}{e\,r}\right)$$

Gl 12.03

Jetzt fehlt noch die Berechnung der wahren Anomalie als Funktion der Zeit T(t)

$$e \cdot r \cdot (\cos(T(r))) = a\,(1-e^2) - r$$

$$e \cdot r \cdot (\cos(T(r))) + r = a\,(1-e^2)$$

$$r(e \cdot (\cos(T(r))) + 1) = a\,(1-e^2)$$

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{(e \cdot (\cos(T(r))) + 1)}$$

Gl 12.04

Zum Verständnis zwei numerische Beispiele mit den willkürlichen Werten
a = 15, e = 1/3 , r = 34/3

$$T(r) = arccos\left(\frac{a\,(1-e^2)-r}{e\,r}\right)$$

$$T(r) = arccos\left(\frac{15\,\left(\frac{8}{9}\right)-\frac{34}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{34}{3}}\right) = arccos\left(\frac{\frac{120}{9}-\frac{102}{9}}{\frac{34}{9}}\right) = arccos\left(\frac{18}{34}\right) = 1{,}012889 \approx 58°$$

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\mathrm{arccos}\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\mathrm{arccos}\left(\frac{15-\frac{34}{3}}{5}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{15-\frac{34}{3}}{5}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\mathrm{arccos}\left(\frac{11}{15}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{11}{15}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}(0{,}74758434 - 0{,}22662308)$$

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}(0{,}52096126)$$

Nach 8% der Umlaufzeit sind 16% des Winkels geschafft. Wow – wie exzentrisch!

Wenn T = 180°, dann muss r = (a + ae) sein.

$$T(r) = arccos\left(\frac{a\,(1-e^2)-(\mathrm{a}\;+\;\mathrm{ae})}{e\,(\mathrm{a}\;+\;\mathrm{ae})}\right)$$

$$T(r) = arccos\left(\frac{a\;-a\,e^2-\mathrm{a}-\;\mathrm{ae}}{e\,(\mathrm{a}+\mathrm{ae})}\right)$$

$$T(r) = arccos\left(-\frac{a\,e+\;\mathrm{a}}{(\mathrm{a}+\mathrm{ae})}\right)$$

$$T(r) = arccos(-1) = \pi$$

Stimmt.

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\mathrm{arccos}\left(\frac{a-(\mathrm{a}\;+\;\mathrm{ae})}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-(\mathrm{a}\;+\;\mathrm{ae})}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(r) = \frac{U}{2\,\pi}(\arccos(-1)) = \frac{U}{2}$$

Stimmt auch.

T(t) kann man nicht explizit machen, dafür aber t(T)

$$t(r) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{a-r}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

Einsetzen

$$r = \left(\frac{a\,(1-e^2)}{(e\ \cdot(\cos(T))+1)}\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{a-\left(\frac{a\,(1-e^2)}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-\left(\frac{a\,(1-e^2)}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\left(\frac{a(e\,\cdot(\cos(T))+1)}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)-\left(\frac{a\,(1-e^2)}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)}{a\,e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{\left(\frac{a(e\,\cdot(\cos(T))+1)}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)-\left(\frac{a\,(1-e^2)}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)}{a\,e}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\left(\frac{e\,\cdot(\cos(T))+1}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)-\left(\frac{1-e^2}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)}{e}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{\left(\frac{e\,\cdot(\cos(T))+1}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)-\left(\frac{1-e^2}{(e\,\cdot(\cos(T))+1)}\right)}{e}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{e\ \cdot(\cos(T))+1\ -1+e^2}{e(e\ \cdot(\cos(T))+1)}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{e\ \cdot(\cos(T))+1\ -1+e^2}{e\,(e\ \cdot(\cos(T))+1)}\right)^2}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T)\ +e}{e\ \cdot(\cos(T))+1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2(T)\ +2\,e\ \cdot\cos(T)\ +\ e^2}{(e\ \cdot(\cos(T))+1)^2}\right)}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T)\ +e}{e\ \cdot(\cos(T))+1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{\frac{e^2\ \cdot\cos^2(T)+2e\ \cdot\cos(T)\ +1}{(e^2\ \cdot\cos^2(T)+2e\ \cdot\cos(T)\ +1)}-\frac{\cos^2(T)\ +2\,e\ \cdot\cos(T)\ +\ e^2}{(e^2\ \cdot\cos^2(T)+2e\ \cdot\cos(T)\ +1)}}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T)\ +e}{e\ \cdot(\cos(T))+1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{\frac{e^2\ \cdot\cos^2(T)+2e\ \cdot\cos(T)\ +1-\cos^2(T)\ -2\,e\ \cdot\cos(T)\ -\ e^2}{(e\ \cdot(\cos(T))+1)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) \;= \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T)\ +e}{e\ \cdot(\cos(T))+1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{\frac{e^2\ \cdot\cos^2(T)-\cos^2(T)\ -\ e^2+1}{(e\ \cdot(\cos(T))+1)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) \; = \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T)\; + e}{e\;\cdot(\cos(T)) + 1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{\frac{(\,e^2-1)\;\cdot\cos^2(T) - (\,e^2-1)}{(e\;\cdot(\cos(T)) + 1)^2}}\right)\right)$$

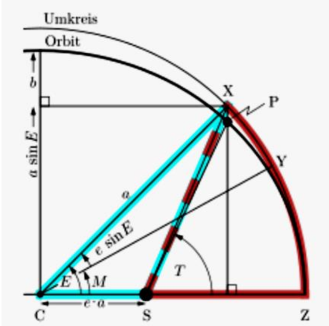
$$t(T) \; = \frac{U}{2\,\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T)\; + e}{e\;\cdot(\cos(T)) + 1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{(\,e^2-1)\;\frac{\cos^2(T) - 1}{(e\;\cdot(\cos(T)) + 1)^2}}\right)\right)$$

Gl 12.05

Hinweis aus trauriger Erfahrung: Den Quadratausdruck im Nenner sollte man nicht unbedacht vor die Wurzel ziehen, das kann Probleme mit dem Vorzeichen ergeben!

Damit lässt sich mit geeigneten numerischen Methoden aus der Zeit die wahre Anomalie berechnen.

Die letzte Frage ist, ob daraus die Rückführung auf die Kepler – Gleichung möglich ist.



zu Gleichung **(7)**

Entscheidend ist dafür der Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie T und der exzentrischen Anomalie E.

Gegeben seien (Ellipse wieder ein Brennpunktlage F2) a, e · a und T. Gesucht ist E.

Die x – Koordinaten von X und P sind gleich, nämlich

$$x(P) = x(X) = r\cdot\cos(T)$$

Daraus folgt bekanntlich

$$\cos(T(r)) = \frac{a\,(1-e^2) - r}{e\,r}$$

Gl 12.03

Für E gilt offensichtlich:

$$a\;\cdot\cos(E) = e\cdot a + \; r\cdot\cos(T)$$

$$r = \; a(1-e^2) - e\;\cdot\; x(P)$$

Gl 12.02

$$r = \; a(1-e^2) - e\;\cdot\; r\cdot\cos(T)$$

$$r + e\;\cdot\; r\cdot\cos(T) \; = \; a(1-e^2)$$

$$r(1 + e\;\cdot\cos(T)) \;\; = \; a(1-e^2)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1 + e\;\cdot\cos(T))}$$

Einsetzen

$$a\;\cdot\cos(E) = e\cdot a + \frac{a(1-e^2)}{(1 + e\;\cdot\cos(T))}\cdot\cos(T)$$

$$\cos(E) = e + \frac{(1 - e^2) \cdot \cos(T)}{1 + e \cdot \cos(T)}$$

$$\cos(E) = \frac{e(1 + e \cdot \cos(T))}{1 + e \cdot \cos(T)} + \frac{(1 - e^2) \cdot \cos(T)}{1 + e \cdot \cos(T)}$$

$$\cos(E) = \frac{e + e^2 \cdot \cos(T) + \cos(T) - e^2 \cdot \cos(T)}{1 + e \cdot \cos(T)}$$

$$\cos(E) = \frac{e + \cos(T)}{1 + e \cdot \cos(T)}$$

cos(T) explizit machen

$$(1 + e \cdot \cos(T)) \cdot (\cos(E)) = (e + \cos(T))$$

$$\cos(E) + e \cdot \cos(T) \cdot \cos(E) = e + \cos(T)$$

$$e \cdot \cos(E) \cdot \cos(T) - \cos(T) = e - \cos(E)$$

$$(e \cdot \cos(E) - 1) \cdot \cos(T) = e - \cos(E)$$

$$\cos(T) = \frac{e - \cos(E)}{e \cdot \cos(E) - 1} = \left(\frac{\cos(E) - e}{1 - \mathrm{e} \cos(E)}\right)$$

Gl 12.06

Vergleichen mit dem Ergebnis aus Kapitel 11

$$\cos(T) = \left(\frac{\cos(E) - e}{1 - \mathrm{e} \cos(E)}\right)$$

Gl 10.11

Das stimmt überein.

Somit können die wahre Anomalie T und die exzentrische Anomalie E analytisch ineinander umgerechnet werden.

Die Kepler – Gleichung lautet beispielsweise

$$E(t) = e \cdot sin(E(t)) + \frac{2\pi}{U} t$$

Elementarumformung, um t explizit zu machen

$$t = \frac{U}{2\pi}\left(E(t) - e \cdot sin\big(E(t)\big)\right)$$

Zur Verfügung haben wir bisher

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(T) + e}{e \cdot (\cos(T)) + 1}\right) - e \cdot \left(\sqrt{(e^2 - 1)\ \frac{\cos^2(T) - 1}{(e \cdot (\cos(T)) + 1)^2}}\right)\right)$$

Gl 12.05

und

$$\cos(T) = \left(\frac{\cos(E) - e}{1 - e\cos(E)}\right)$$

Gl 12.06

12.06 in 12.05 einsetzen

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos\left(\frac{\left(\frac{\cos(E)- e}{1-e\cdot\cos(E)}\right)+e}{e\cdot\left(\frac{\cos(E)- e}{1-e\cdot\cos(E)}\right)+1}\right) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{\left(\frac{\cos(E)- e}{1- e\cos(E)}\right)^2 - 1}{\left(e\cdot\left(\left(\frac{\cos(E)- e}{1- e\cos(E)}\right)\right)+1\right)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos\left(\frac{\frac{\cos(E)- e}{1-e\cdot\cos(E)} + \frac{e-e^2\cdot\cos(E)}{1-e\cdot\cos(E)}}{\frac{e\cdot\cos(E)-e^2}{1-e\cdot\cos(E)} + \frac{1-e\cdot\cos(E)}{1-e\cdot\cos(E)}}\right) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{\left(\frac{\cos^2(E)- 2e\cos(E)+e^2}{1- 2e\cos(E)+e^2\cos^2(E)}\right) - 1}{\left(\left(\frac{e\cos(E)- e^2}{1- e\cos(E)}\right)+1\right)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(E) - e + e - e^2\cdot\cos(E)}{e\cdot\cos(E) - e^2 + 1 - e\cdot\cos(E)}\right) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{\frac{\cos^2(E)- 2e\cos(E)+e^2}{1- 2e\cos(E)+e^2\cos^2(E)} - \frac{1- 2e\cos(E)+e^2\cos^2(E)}{1- 2e\cos(E)+e^2\cos^2(E)}}{\left(\frac{e\cos(E)- e^2}{1- e\cos(E)} + \frac{1- e\cos(E)}{1- e\cos(E)}\right)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos\left(\frac{\cos(E) - e^2\cdot\cos(E)}{1-e^2}\right) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{\frac{\cos^2(E)- 2e\cos(E)+e^2-1+ 2e\cos(E)-e^2\cos^2(E)}{1- 2e\cos(E)+e^2\cos^2(E)}}{\left(\frac{e\cos(E)- e^2+1- e\cos(E)}{1- e\cos(E)}\right)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos(\cos(E)) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{\cos^2(E) - 2e\cos(E) + e^2 - 1 + 2e\cos(E) - e^2\cos^2(E)}{(e\cos(E) - e^2 + 1 - e\cos(E))^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos(\cos(E)) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{(e^2-1) - (e^2\cos^2(E) - \cos^2(E))}{(-e^2+1)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos(\cos(E)) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)\frac{(e^2-1) - (e^2-1)\cos^2(E)}{(-e^2+1)^2}}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(\arccos(\cos(E)) - e\cdot\left(\sqrt{(e^2-1)^2\frac{1-\cos^2(E)}{(1-e^2)^2}}\right)\right)$$

Genau für diese Stelle mussten wir die ganze Zeit den Quadratausdruck im Nenner mitschleppen.

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left((E) - e\cdot\left(\sqrt{1-\cos^2(E)}\right)\right)$$

$$t(T) = \frac{U}{2\pi}\left(E - e\cdot\sin(E)\right)$$

Und das ist die Kepler – Gleichung!