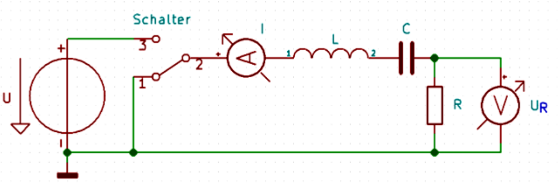
Der Einschaltvorgang am Serienresonanzkreis 2. Ordnung

Dieser Aufsatz wendet sich an Studierende und zeigt eine Möglichkeit, gegenständliches Standard – Problem der Elektrotechnik und Mechanik Schritt für Schritt zu lösen.

Deutlich unangenehmer zu modellieren als das RC – Hochpassfilter ist der Serienresonanzkreis 2. Ordnung im Zeitbereich. Wir kennen diese Art Schaltung im Prinzip schon, nur sehen wir jetzt zwei reaktive Bauelemente im Signalweg.



Der Kondensator sei zu Beginn des Versuchs entladen. Da es sich um eine reine Serienschaltung handelt, rechnen wir über den Strom i(t), die Ausgangsspannung bekommen wir über das Ohmsche Gesetz dann gratis.

Die Gesamtspannung im Kreis beträgt gemäß Kirchhoff 2

$$U = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$$

Im Einzelnen

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\, dt$$

sowie

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

Zusammengefasst

$$U = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \int u_R(t)\, dt + u_R(t)$$

Differenzieren, um das Integral loszuwerden

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{d^2u_R(t)}{dt^2} + \frac{u_R(t)}{RC} + \frac{du_R(t)}{dt} = 0$$

Mit RC erweitern

$$LC \cdot \frac{d^2u_R(t)}{dt^2} + u_R(t) + \mathrm{RC}\frac{du_R(t)}{dt} = 0$$

Umsortieren

$$LC \cdot \frac{d^2u_R(t)}{dt^2} + \mathrm{RC}\frac{du_R(t)}{dt} + u_R(t) = 0$$

Ansatz (ich weiß, das kann man auch anders lösen)

$$u_R(t) = K \cdot e^{st}$$

$$\frac{du_R(t)}{dt} = K \cdot s \cdot e^{st}$$

$$\frac{d^2u_R(t)}{dt^2} = K \cdot s^2 \cdot e^{st}$$

Einsetzen

$$L\mathrm{C} \cdot K \cdot s^2 \cdot e^{st} + \mathrm{RC}K \cdot s \cdot e^{st} + K \cdot e^{st} \ = 0$$

Kürzen

$$L\mathrm{C} \cdot K \cdot s^2 + \mathrm{RC}K \cdot s + K \ = 0$$

$$s^2 L\mathrm{C} + s\mathrm{RC} + 1 \ = 0$$

Höchstes Glied auf 1 bringen

$$s^2 + s\frac{\mathrm{R}}{L} + \frac{1}{L\mathrm{C}} \ = 0$$

Quadratische Gleichung lösen

$$s_{1,2} = \ -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} = \ -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \ \sigma \pm j\omega$$

mit

$$\sigma = \ -\frac{R}{2L} \ und \ \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$s_1 = (\sigma + j\omega)$$
$$s_2 = (\sigma - j\omega)$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$u_R(t) = K_1 \cdot e^{s_1 t} + K_2 \cdot e^{s_2 t} = K_1 \cdot e^{(\sigma + j\omega)t} + K_2 \cdot e^{(\sigma - j\omega)t} = e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{j\omega t} + K_2 \cdot e^{-j\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{j\omega t} + K_2 \cdot e^{-j\omega t})$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \ sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \ sin(\omega t)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t}(K_1 \cdot \left(\cos(\omega t) + jsin(\omega t)\right) + K_2 \cdot (\cos(\omega t) - jsin(\omega t)))$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t}(\left(K_1\cos(\omega t) + jK_1 sin(\omega t)\right) + (\ K_2 \cos(\omega t) - j \ K_2 sin(\omega t)))$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t}((K_1 + \ K_2)\cos(\omega t) + j(K_1 - \ K_2)sin(\omega t))$$

Zusammenfassung:

$$M = K_1 + K_2$$

$$N = j(K_1 - K_2)$$

Anfangsbedingung 1: $u_R(0) = U$

$$u_R(0) = e^{\sigma 0}((K_1 + K_2)\cos(\omega 0) + j(K_1 - K_2) sin(\omega 0))$$

$$u_R(0) = K_1 + K_2 = \mathrm{M} = \mathrm{U}$$

Anfangsbedingung 2: bei t = 0 gilt

$$\frac{du_R(0)}{dt} = 0$$

$$\frac{d(e^{\sigma t}(M\cos(\omega t) + N\, sin(\omega t)))}{dt} = 0$$

$$(e^{\sigma t})'\big(M\cos(\omega t) + N\, sin(\omega t)\big) + e^{\sigma t}\big(M\cos(\omega t) + N\, sin(\omega t)\big)'$$

$$\sigma(e^{\sigma t})\big(M\cos(\omega t) + N\, sin(\omega t)\big) + e^{\sigma t}\big(-M\,\omega\sin(\omega t) + N\,\omega\, cos(\omega t)\big)$$

$$(e^{\sigma t})\big(\, M\,\sigma\cos(\omega t) + N\,\sigma\, sin(\omega t)\big) + e^{\sigma t}\big(-M\,\omega\sin(\omega t) + N\,\omega\, cos(\omega t)\big)$$

$$(e^{\sigma t})\big(\, M\,\sigma\cos(\omega t) + N\,\sigma\, sin(\omega t) - M\,\omega\sin(\omega t) + N\,\omega\, cos(\omega t)\big)$$

t=0

$$M\,\sigma + N\,\omega \; = 0$$

Umbenennen

$$U\,\sigma + N\,\omega \; = 0$$

Elementarumformung

$$N = -\frac{U\,\sigma}{\omega}$$

Einsetzen

$$M = U = K_1 + K_2$$

$$N = -\frac{U\,\sigma}{\omega} = j(K_1 - K_2)$$

$$K_1 - K_2 = -\frac{U\,\sigma}{j\omega}$$

$$K_1 + K_2 = U$$

$$2\,K_1 = U - \frac{U\,\sigma}{j\omega} = U\ \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right)$$

$$K_1 = \frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right)$$

$$K_2 = U - \ K_1 = U - \frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) = U - \frac{U}{2} + \frac{U\,\sigma}{2\,j\,\omega} = \frac{U}{2} + \frac{U\,\sigma}{2\,j\,\omega} = \frac{U}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right)$$

$$K_2 = \frac{U}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right)$$

Probe

$$K_1 + \ K_2 = U$$

$$\frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) + \frac{U}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) = U$$

$$\frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega} + 1 + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) = U$$

Stimmt

$$K_1 - \ K_2 = -\frac{U\,\sigma}{j\omega}$$

$$\frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) - \frac{U}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) = -\frac{U\,\sigma}{j\omega}$$

$$\frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega} - 1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) = -\frac{U\,\sigma}{j\omega}$$

$$\frac{U}{2} \cdot \left(-\frac{2\sigma}{j\,\omega}\right) = -\frac{U\,\sigma}{j\omega}$$

$$-\frac{U\,\sigma}{j\,\omega} = -\frac{U\,\sigma}{j\omega}$$

Stimmt auch.

Einsetzen der Konstanten

$$u_R(t) = e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{j\omega t} + K_2 \cdot e^{-j\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot (\frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) \cdot e^{j\omega t} + \frac{U}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right)\ \cdot e^{-j\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2}(\left(\left(\frac{j\omega}{j\omega}\right) - \frac{\sigma}{j\,\omega}\right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\left(\frac{j\omega}{j\omega}\right) + \frac{\sigma}{j\,\omega}\right)\ \cdot e^{-j\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2\,\omega}\left(\left(\left(\frac{j\omega}{j}\right) - \frac{\sigma}{j}\right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\left(\frac{j\omega}{j}\right) + \frac{\sigma}{j}\right) \cdot e^{-j\omega t}\right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2\,j\,\omega}\left((j\omega - \sigma) \cdot e^{j\omega t} + (j\omega + \sigma) \cdot e^{-j\omega t}\right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2\,j\,\omega}\left(j\omega \cdot e^{j\omega t} - \sigma \cdot e^{j\omega t} + j\omega \cdot e^{-j\omega t} + \sigma \cdot e^{-j\omega t}\right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2\,j\,\omega}\left(j\omega \cdot e^{j\omega t} + j\omega \cdot e^{-j\omega t} - \sigma \cdot e^{j\omega t} + \sigma \cdot e^{-j\omega t}\right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot U \cdot \left(\frac{j\omega \cdot e^{j\omega t} + j\omega \cdot e^{-j\omega t}}{2\,j\,\omega} - \frac{\sigma \cdot e^{j\omega t} - \sigma \cdot e^{-j\omega t}}{2\,j\,\omega}\right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot U \cdot \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - \frac{\sigma}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2\,j}\right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot U \cdot \left(\cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot U \cdot \left(\frac{\omega}{\omega} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right)$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{\omega} \cdot (\omega \cdot \cos(\omega t) - \sigma \cdot \sin(\omega t))$$

Das ist die allgemeine Lösung.

1) Aperiodischer Grenzfall ω=0

Direkt geht das nicht, weil ω im Nenner steht, also L´Hospital

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\omega} \cdot (\omega \cdot \cos(\omega t) - \sigma \cdot \sin(\omega t))$$

$$\lim_{\omega \to 0} \left(\cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right)$$

$$\lim_{\omega \to 0} \cos(\omega t) - \sigma \cdot \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

$$1 - \sigma \cdot \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

$$1 - \sigma \cdot t$$

Einsetzen

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot U \cdot (1 - \sigma \cdot t)$$

$$u_R(t) = U \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot L}} \cdot \left(1 + \frac{R}{2L} \cdot t\right)$$

Und das sollte gelten, falls

$$\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2} = 0$$

$$\frac{4L}{4L^2 \cdot C} - \frac{R^2 C}{4L^2 \cdot C} = 0$$

$$4L = R^2 C$$

$$L = \frac{R^2 C}{4}$$

Anders formuliert: Der aperiodische Grenzfall tritt auf, wenn gilt

$$4\frac{L}{R} = RC \ oder \ 4\tau_L = \tau_C$$

Demnach wären

$$u_R(t) = U \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot L}} \cdot \left(1 + \frac{R}{2L} \cdot t\right)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int u_R(t)\, dt$$

$$u_L(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_R(t)}{dt}$$

L einsetzen

$$L = \frac{R^2 C}{4}$$

$$u_R(t) = U \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot \frac{R^2 C}{4}}} \cdot \left(1 + \frac{R}{2\frac{R^2 C}{4}} \cdot t\right)$$

$$u_R(t) = U \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)$$

Das ist die Übertragungsfunktion für den aperiodischen Grenzfall.

Berechnung der Teilspannungen

$$u_L(t) = \frac{\frac{R^2 C}{4}}{R} \cdot \frac{du_R(t)}{dt}) = \frac{RC}{4} \cdot \frac{du_R(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{RC}{4} \cdot \frac{d\left(U \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)\right)}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{URC}{4} \cdot \frac{d\left(e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)\right)}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{URC}{4} \cdot \left(-\frac{2}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right) + e^{-\frac{2t}{RC}} \left(\frac{2}{RC}\right)\right)$$

$$u_L(t) = \frac{URC}{4} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(-\frac{2}{RC} \cdot \left(1 + \frac{2t}{RC}\right) + \frac{2}{RC}\right)$$

$$u_L(t) = \frac{URC}{4} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(-\frac{2}{RC} - \frac{2}{RC}\frac{2t}{RC} + \frac{2}{RC}\right)$$

$$u_L(t) = \frac{URC}{4} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(-\frac{4t}{R^2C^2}\right)$$

$$u_L(t) = -\frac{Ut}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$\sigma = -\frac{R}{2L} = -\frac{R}{2\frac{R^2C}{4}} = -\frac{2}{RC}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int u_R(t)\, dt = \frac{1}{RC} \cdot \int (U \cdot e^{\sigma t} \cdot (1 - \sigma \cdot t))\, dt$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \int ((1 - \sigma t) \cdot e^{\sigma t})\, dt$$

$$u = (1 - \sigma t)$$

$$u' = -\sigma$$

$$v = \frac{e^{\sigma t}}{\sigma}$$

$$v' = e^{\sigma t}$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[(1 - \sigma t) \cdot \frac{e^{\sigma t}}{\sigma} - \int \left((-\sigma) \cdot \frac{e^{\sigma t}}{\sigma}\right) dt\right] + K_3$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[(1 - \sigma t) \cdot \frac{e^{\sigma t}}{\sigma} + \int (e^{\sigma t})dt\right] + K_3$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\frac{e^{\sigma t}}{\sigma} - \frac{(\sigma t) \cdot e^{\sigma t}}{\sigma} + \frac{e^{\sigma t}}{\sigma}\right] + K_3$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[2\frac{e^{\sigma t}}{\sigma} - t \cdot e^{\sigma t}\right] + K_3$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{2}{\sigma} - t\right) + K_3$$

Probe des nackten Integrals

$$\frac{d\left(e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{2}{\sigma} - t\right)\right)}{dt} = \left(e^{\sigma t}{}' \cdot \left(\frac{2}{\sigma} - t\right)\right) + \left(e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{2}{\sigma} - t\right)'\right)$$

$$\left(\sigma \cdot e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{2}{\sigma} - t\right)\right) + \left(e^{\sigma t} \cdot (-1)\right)$$

$$\left(\left(\frac{\sigma \cdot e^{\sigma t} \cdot 2}{\sigma} - \sigma \cdot e^{\sigma t} \cdot t\right)\right) - e^{\sigma t}$$

$$\left((2e^{\sigma t} - \sigma \cdot t \cdot e^{\sigma t})\right) - e^{\sigma t}$$

$$2e^{\sigma t} - \sigma \cdot t \cdot e^{\sigma t} - e^{\sigma t}$$

$$e^{\sigma t} - \sigma \cdot t \cdot e^{\sigma t}$$

$$e^{\sigma t}(1 - \sigma \cdot t)$$

Stimmt

Einsetzen

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} \cdot \left(\frac{2}{-\frac{2}{RC}} - t\right) + K_3$$

$$u_C(t) = -\frac{U \cdot (RC + t)}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} + K_3$$

Anfangsbedingung zur Berechnung der Integrationskonstanten

$$u_C(0) = 0$$

$$u_C(0) = -\frac{U \cdot (RC + 0)}{RC} \cdot e^{-\frac{0}{RC}} + K_3 = 0$$

$$-\frac{U \cdot (RC)}{RC} + K_3 = 0$$

$$-U + K_3 = 0$$

$$K_3 = U$$

$$u_C(t) = -\frac{U \cdot (RC + t)}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} + U$$

Zusammenfassung als Probe

$$U = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$$

$$U = \left(-\frac{Ut}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}\right) + \left(-\frac{U \cdot (RC + t)}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} + U\right) + \left(U \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)\right)$$

$$U = -\frac{Ut}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} - \frac{U \cdot (RC + t)}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} + U + U \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)$$

$$1 = -\frac{t}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} - \frac{(RC + t)}{RC} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} + 1 + e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)$$

$$1 = e^{-\frac{2t}{RC}} \left(-\frac{t}{RC} - \frac{(RC + t)}{RC} + \left(1 + \frac{2t}{RC}\right)\right) + 1$$

$$1 = e^{-\frac{2t}{RC}} \left(-\frac{t}{RC} - \frac{RC + t}{RC} + 1 + \frac{2t}{RC}\right) + 1$$

$$1 = e^{-\frac{2t}{RC}} \left(-\frac{t}{RC} - \frac{RC}{RC} - \frac{t}{RC} + 1 + \frac{2t}{RC}\right) + 1$$

$$1 = e^{-\frac{2t}{RC}}(-1 + 1) + 1$$

Stimmt – uff! Damit ist die Übertragungsfunktion für den aperiodischen Grenzfall berechnet!

2) Aperiodischer Fall, Kriechfall. $\omega > 0$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} = \sigma \pm \omega$$

mit

$$\sigma = -\frac{R}{2L} \; und \; \omega = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_1 = (\sigma + \omega)$$

$$s_2 = (\sigma - \omega)$$

Die konkrete Bedingung lautet daher

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C} > 0$$

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{L \cdot C} > 0$$

da aus technischen Gründen alle Bauteilewerte > 0 sein müssen, darf man

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{L \cdot C}$$

$$\frac{R^2}{4L} > \frac{1}{C}$$

$$\frac{R}{4L} > \frac{1}{R \cdot C}$$

$$R \cdot C > 4\frac{L}{R}$$

oder anders formuliert

$$\tau_C > 4\,\tau_L$$

Für die Übertragungsfunktion bedeutet das

$$u_R(t) = K_1 \cdot e^{s_1 t} + K_2 \cdot e^{s_2 t} = K_1 \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + K_2 \cdot e^{(\sigma-\omega)t} = e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t})$$

Anfangsbedingung 1: $u_R(0) = U$

$$u_R(0) = e^{\sigma 0}(K_1 \cdot e^{\omega 0} + K_2 \cdot e^{-\omega 0}) = \mathrm{U}$$

$$U = (K_1 + K_2)$$

$$K_1 + K_2 = \mathrm{U}$$

Anfangsbedingung 2: bei t = 0 gilt

$$\frac{du_R(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d(e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t}))}{dt} = 0$$

$$e^{\sigma t\prime} \cdot (K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t}) + e^{\sigma t} \cdot (K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t})' = 0$$

$$\sigma \cdot e^{\sigma t} \cdot (K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t}) + e^{\sigma t} \cdot (K_1 \cdot \omega \cdot e^{\omega t} - K_2 \cdot \omega \cdot e^{-\omega t}) = 0$$

$$e^{\sigma t} \cdot [\sigma \cdot K_1 \cdot e^{\omega t} + \sigma \cdot K_2 \cdot e^{-\omega t} + K_1 \cdot \omega \cdot e^{\omega t} - K_2 \cdot \omega \cdot e^{-\omega t}] = 0$$

Die Exponentialfunktion kann nicht 0 werden, also lassen wir sie weg.

$$K_1 \cdot \sigma \cdot e^{\omega t} + K_1 \cdot \omega \cdot e^{\omega t} + \sigma \cdot K_2 \cdot e^{-\omega t} - K_2 \cdot \omega \cdot e^{-\omega t} = 0$$

$$K_1 \cdot (\sigma \cdot e^{\omega t} + \omega \cdot e^{\omega t}) + K_2 \cdot (\sigma \cdot e^{-\omega t} - K_2 \cdot \omega \cdot e^{-\omega t}) = 0$$

$$K_1 \cdot e^{\omega t} \cdot (\sigma + \omega) + K_2 \cdot e^{-\omega t} \cdot (\sigma - \omega) = 0$$

t = 0

$$K_1 \cdot (\sigma{+}\omega) + K_2 \cdot (\,\sigma - \omega) = 0$$

Zur Erinnerung

$$K_1 + \ K_2 = \mathrm{U}$$

$$K_1 = (\mathrm{U} - K_2)$$

$$(\mathrm{U} - K_2) \cdot (\sigma{+}\omega) + K_2 \cdot (\,\sigma - \omega) = 0$$

$$\mathrm{U}\,\sigma + U\,\omega - \sigma\,K_2 - \omega\,K_2 + \sigma\,K_2 - \omega\,K_2 = 0$$

$$\mathrm{U}\,\sigma \ + \ U\,\omega - 2\,\omega\,K_2 = 0$$

$$U(\sigma{+}\omega) = 2\,\omega\,K_2$$

$$K_2 = U\,\frac{(\sigma + \omega)}{2\,\omega}$$

$$K_1 = \left(\mathrm{U} - U\,\frac{(\sigma + \omega)}{2\,\omega}\right)$$

$$K_1 = \mathrm{U}\left(\frac{2\,\omega}{2\,\omega} - \frac{\sigma + \omega}{2\,\omega}\right)$$

$$K_1 = \mathrm{U}\left(\frac{2\,\omega}{2\,\omega} - \frac{\sigma}{2\,\omega} - \frac{\omega}{2\,\omega}\right)$$

$$K_1 = \mathrm{U}\left(\frac{\omega - \sigma}{2\,\omega}\right)$$

Probe

$$K_1 + \ K_2 = \mathrm{U}\left(\frac{\omega - \sigma}{2\,\omega}\right) + U\,\frac{(\sigma + \omega)}{2\,\omega} = \mathrm{U}\left(\frac{\omega - \sigma + \sigma + \omega}{2\,\omega}\right) = \mathrm{U}\left(\frac{\omega + \omega}{2\,\omega}\right) = \mathrm{U}$$

Stimmt

Einsetzen

$$u_R(t) = e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t}(U\left(\frac{\omega - \sigma}{2\,\omega}\right) \cdot e^{\omega t} + U\,\frac{(\sigma + \omega)}{2\,\omega} \cdot e^{-\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2} \cdot (\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega}\right) \cdot e^{\omega t} + \frac{(\sigma + \omega)}{\omega} \cdot e^{-\omega t})$$

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{\omega t} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{-\omega t})$$

Probe Bedingung 1

$$u_R(0) = e^{\sigma 0} \cdot \frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{\omega 0} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{-\omega 0}) = U$$

$$u_R(0) = \frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right)) = U$$

$$u_R(0) = \frac{U}{2} \cdot (1 - \frac{\sigma}{\omega} + 1 + \frac{\sigma}{\omega}) = U$$

$$u_R(0) = \frac{U}{2} \cdot (1 + 1) = U$$

Stimmt

Probe Bedingung 2 (t = 0)

$$\frac{d(e^{\sigma t}(K_1 \cdot e^{\omega t} + K_2 \cdot e^{-\omega t}))}{dt} = 0$$

$$\frac{d(e^{\sigma t}(U\left(\frac{\omega - \sigma}{2\,\omega}\right) \cdot e^{\omega t} + U\frac{(\sigma + \omega)}{2\,\omega} \cdot e^{-\omega t}))}{dt} = 0$$

Konstante weglassen

$$\frac{d(e^{\sigma t}((\omega - \sigma) \cdot e^{\omega t} + (\sigma + \omega) \cdot e^{-\omega t}))}{dt} = 0$$

$$(\sigma \cdot e^{\sigma t}((\omega - \sigma) \cdot e^{\omega t} + (\sigma + \omega) \cdot e^{-\omega t}) + (e^{\sigma t}((\omega - \sigma) \cdot \omega \cdot e^{\omega t} - (\sigma + \omega) \cdot \omega \cdot e^{-\omega t}) = 0$$

$$(\sigma \cdot ((\omega - \sigma) \cdot e^{\omega t} + (\sigma + \omega) \cdot e^{-\omega t}) + (((\omega - \sigma) \cdot \omega \cdot e^{\omega t} - (\sigma + \omega) \cdot \omega \cdot e^{-\omega t}) = 0$$

t = 0

$$\left(\sigma \cdot ((\omega - \sigma) + (\sigma + \omega)\right) + (((\omega - \sigma) \cdot \omega - (\sigma + \omega) \cdot \omega) = 0$$

$$(\sigma \cdot (\omega - \sigma + \sigma + \omega) + \left(((\omega^2 - \sigma \cdot \omega) - (\sigma \cdot \omega + \omega^2)\right) = 0$$

$$(\sigma \cdot (2\omega) + ((\omega^2 - \sigma \cdot \omega - \sigma \cdot \omega - \omega^2) = 0$$

$$2 \cdot \sigma \cdot \omega - 2 \cdot \sigma \cdot \omega = 0$$

Stimmt auch.

Explizit

$$u_R(t) = e^{\sigma t} \cdot \frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{\omega t} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{-\omega t})$$

$$u_R(t) = \frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma + \omega)t} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma - \omega)t})$$

Explizit mit Bauteilewerten

$$u_R(t) = \frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{-\frac{R}{2L}}{\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}\right) \cdot e^{(-\frac{R}{2L}+\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right))t} + \left(1 + \frac{-\frac{R}{2L}}{\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}\right) \cdot e^{(-\frac{R}{2L}-\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right))t})$$

$$u_R(t) = \frac{U}{2} \cdot (\left(1 + \frac{R}{2L\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}\right) \cdot e^{(-\frac{R}{2L}+\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right))t} + \left(1 - \frac{R}{2L\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}\right) \cdot e^{(-\frac{R}{2L}-\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right))t})$$

Man erkennt, dieser Ausdruck ist unübersichtlich.

In vielen praktischen Fällen verschwindet der zweite Term, da $\omega > 0$ ist. Für diese Fälle vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$u_R(t) = \frac{U}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t}$$

Zur Probe nun die Berechnung der Teilspannungen

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int u_R(t)dt$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int (\frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t})) \, dt$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{U}{2} \cdot \left[\int \left(\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t}\right) dt + \int \left(\left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}\right) dt\right]$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{U}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot \int \left(e^{(\sigma+\omega)t}\right) dt + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot \int \left(e^{(\sigma-\omega)t}\right) dt\right]$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{U}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot \frac{e^{(\sigma+\omega)t}}{(\sigma+\omega)} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot \frac{e^{(\sigma-\omega)t}}{(\sigma-\omega)} + K\right]$$

$$u_C(t) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega(\sigma+\omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{\omega(\sigma-\omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} + K\right]$$

Konstante berechnen. $u_C(0) = 0$

$$0 = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega(\sigma+\omega)}\right) + \left(\frac{\omega + \sigma}{\omega(\sigma-\omega)}\right) + K\right]$$

$$K = -\left(\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega(\sigma+\omega)}\right) + \left(\frac{\omega + \sigma}{\omega(\sigma-\omega)}\right)\right)$$

$$K = \frac{(\sigma - \omega)}{\omega(\sigma+\omega)} - \frac{(\sigma + \omega)}{\omega(\sigma-\omega)}$$

$$K = \frac{(\sigma-\omega)(\sigma-\omega)}{\omega(\sigma+\omega)(\sigma-\omega)} - \frac{(\sigma+\omega)(\sigma+\omega)}{\omega(\sigma-\omega)(\sigma+\omega)}$$

$$K = \frac{(\sigma-\omega)(\sigma-\omega)-(\sigma+\omega)(\sigma+\omega)}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}$$

$$K = \frac{(\sigma^2-2\sigma\omega+\omega^2)-(\sigma^2+2\sigma\omega+\omega^2)}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}$$

$$K = \frac{\sigma^2-2\sigma\omega+\omega^2-\sigma^2-2\sigma\omega-\omega^2}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}$$

$$K = \frac{-4\sigma\omega}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}$$

$$K = \frac{-4\sigma}{(\sigma^2-\omega^2)}$$

Einsetzen

$$u_C(t) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega-\sigma}{\omega(\sigma+\omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega+\sigma}{\omega(\sigma-\omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma}{(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

Probe t = 0

$$u_C(0) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega-\sigma}{\omega(\sigma+\omega)}\right) + \left(\frac{\omega+\sigma}{\omega(\sigma-\omega)}\right) - \frac{4\sigma}{(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

$$u_C(0) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{(\omega-\sigma)}{\omega(\sigma+\omega)}\right) + \left(\frac{(\omega+\sigma)}{\omega(\sigma-\omega)}\right) - \frac{4\sigma\omega}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

$$u_C(0) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\frac{(\omega-\sigma)(\sigma-\omega)}{\omega(\sigma+\omega)(\sigma-\omega)} + \frac{(\omega+\sigma)(\sigma+\omega)}{\omega(\sigma-\omega)(\sigma+\omega)} - \frac{4\sigma\omega}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

$$u_C(0) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\frac{2\sigma\omega-\sigma^2-\omega^2}{\omega(\sigma^2-\omega^2)} + \frac{\sigma^2+\omega^2+2\sigma\omega}{\omega(\sigma^2-\omega^2)} - \frac{4\sigma\omega}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

$$u_C(0) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\frac{2\sigma\omega-\sigma^2-\omega^2+\sigma^2+\omega^2+2\sigma\omega-4\sigma\omega}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

$$u_C(0) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\frac{-\omega^2+\omega^2}{\omega(\sigma^2-\omega^2)}\right] = 0$$

Stimmt

Probe t = ∞

$$u_C(t) = \frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega-\sigma}{\omega(\sigma+\omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega+\sigma}{\omega(\sigma-\omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma}{(\sigma^2-\omega^2)}\right]$$

Abschätzung 1:

$$\sigma = -\frac{R}{2L}, \qquad daher\ muss\ \sigma < 0\ sein$$

$$\omega > 0, \qquad da\ hier\ der\ Kriechfall\ bearbeitet\ wird$$

daher

$$\sigma - \omega < 0$$

Abschätzung 2:

$$\sigma + \omega < 0$$

$$-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} < 0$$

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} < \frac{R}{2L}$$

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} < \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Was offensichtlich stimmt. Daher fallen die Exponentialterme im Unendlichen weg.

$$u_C(\infty) = \frac{U}{2RC} \cdot \left(-\frac{4\sigma}{(\sigma^2 - \omega^2)}\right)$$

$$u_C(\infty) = \frac{U}{2RC} \cdot \left(-\frac{4\left(-\frac{R}{2L}\right)}{\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}\right)\right)}\right)$$

$$u_C(\infty) = \frac{U}{2RC} \cdot \left(\frac{\left(\frac{4R}{2L}\right)}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}\right)$$

$$u_C(\infty) = \frac{U}{RC} \cdot \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{L \cdot C}}\right)$$

$$u_C(\infty) = \frac{U}{RC} \cdot \frac{R}{L} \cdot L \cdot C$$

$$u_C(\infty) = U$$

Stimmt.

Die Spannung an der Spule

$$u_L(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{d(\frac{U}{2} \cdot ((1-\frac{\sigma}{\omega}) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (1+\frac{\sigma}{\omega}) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{U}{2} \cdot \frac{d(((1-\frac{\sigma}{\omega}) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (1+\frac{\sigma}{\omega}) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{U}{2} \cdot ((\left(1-\frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot (\sigma+\omega) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(1+\frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot (\sigma-\omega) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$u_L(t) = U \cdot \frac{L}{2R} \cdot ((\left(\frac{\omega-\sigma}{\omega}\right) \cdot (\sigma+\omega) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega+\sigma}{\omega}\right) \cdot (\sigma-\omega) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$u_L(t) = U \cdot \frac{L}{2R\omega} \cdot (((\omega-\sigma) \cdot (\sigma+\omega)) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + ((\omega+\sigma) \cdot (\sigma-\omega)) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$u_L(t) = U \cdot \frac{L}{2R\omega} \cdot ((\omega^2-\sigma^2) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\sigma^2-\omega^2) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$u_L(t) = U \cdot \frac{L}{2R\omega} \cdot ((\omega^2-\sigma^2) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} - (\omega^2-\sigma^2) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$u_L(t) = U \cdot \frac{L \cdot (\omega^2-\sigma^2)}{2R\omega} \cdot (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t}))$$

Probe

$$u_L(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_R(t)}{dt}$$

$$\frac{R}{L} \cdot \int u_L(t)\, dt = u_R(t)$$

$$\frac{R}{L} \cdot \int \left(U \cdot \frac{L \cdot (\omega^2-\sigma^2)}{2R\omega} \cdot (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t})\right) dt = \frac{U}{2} \cdot ((1-\frac{\sigma}{\omega}) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (1+\frac{\sigma}{\omega}) \cdot e^{(\sigma-\omega)t})$$

$$\frac{(\omega^2-\sigma^2)}{\omega} \cdot \int (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t})\, dt = \left(\frac{\omega-\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega+\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}$$

$$(\omega^2-\sigma^2) \cdot [\int e^{(\sigma+\omega)t}\, dt - \int e^{(\sigma-\omega)t})\, dt] = (\omega-\sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega+\sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}$$

$$(\omega^2-\sigma^2) \cdot \left[\frac{1}{(\sigma+\omega)} e^{(\sigma+\omega)t} - \frac{1}{(\sigma-\omega)} e^{(\sigma-\omega)t}\right] = (\omega-\sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega+\sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}$$

$$\frac{(\omega^2-\sigma^2)}{(\sigma+\omega)} e^{(\sigma+\omega)t} - \frac{(\omega^2-\sigma^2)}{(\sigma-\omega)} e^{(\sigma-\omega)t} = (\omega-\sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega+\sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}$$

$$(\omega-\sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega+\sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} = (\omega-\sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega+\sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}$$

Stimmt

Zusammenführung

$$U = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$$

$$U = (U \cdot \frac{L \cdot (\omega^2 - \sigma^2)}{2R\omega} \cdot (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t}))) + (\frac{U}{2RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega(\sigma + \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{\omega(\sigma - \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma}{(\sigma^2 - \omega^2)}\right]) + (\frac{U}{2} \cdot (\left(1 - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(1 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$2 = (\frac{LC \cdot (\omega^2 - \sigma^2)}{RC\omega} \cdot (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t}))) + (\frac{1}{RC} \cdot \left[\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega(\sigma + \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{\omega(\sigma - \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma\omega}{\omega(\sigma^2 - \omega^2)}\right]) + (\frac{RC}{RC}(\left(\frac{\omega - \sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{\omega}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$2 = (\frac{LC \cdot (\omega^2 - \sigma^2)}{RC\omega} \cdot (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t}))) + (\frac{1}{RC\omega} \cdot \left[\left(\frac{\omega - \sigma}{(\sigma + \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{(\sigma - \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma\omega}{(\sigma^2 - \omega^2)}\right]) + (\frac{RC}{RC\omega}((\omega - \sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega + \sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t}))$$

$$2RC\omega = (LC \cdot (\omega^2 - \sigma^2) \cdot (e^{(\sigma+\omega)t} - e^{(\sigma-\omega)t})) + \left(\frac{\omega - \sigma}{(\sigma + \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{(\sigma - \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma\omega}{(\sigma^2 - \omega^2)} + RC((\omega - \sigma) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + (\omega + \sigma) \cdot e^{(\sigma-\omega)t})$$

$$2RC\omega = (LC) \cdot (\omega^2 - \sigma^2) \cdot (e^{(\sigma+\omega)t}) - (LC) \cdot (\omega^2 - \sigma^2) \cdot (e^{(\sigma-\omega)t}) + \left(\frac{\omega - \sigma}{(\sigma + \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma+\omega)t} + \left(\frac{\omega + \sigma}{(\sigma - \omega)}\right) \cdot e^{(\sigma-\omega)t} - \frac{4\sigma\omega}{(\sigma^2 - \omega^2)} + (RC) \cdot (\omega - \sigma) \cdot (e^{(\sigma+\omega)t}) + (RC) \cdot (\omega + \sigma) \cdot (e^{(\sigma-\omega)t})$$

$$2RC\omega + \frac{4\sigma\omega}{(\sigma^2 - \omega^2)} = \left[(LC) \cdot (\omega^2 - \sigma^2) + \left(\frac{\omega - \sigma}{(\sigma + \omega)}\right) + (RC) \cdot (\omega - \sigma)\right] \cdot (e^{(\sigma+\omega)t}) + \left[(LC) \cdot (\sigma^2 - \omega^2) + \frac{(\omega + \sigma)}{(\sigma - \omega)} + (RC) \cdot (\omega + \sigma)\right] \cdot (e^{(\sigma-\omega)t})$$

Nebenrechnung Term1

$$2RC\omega + \frac{4\sigma\omega}{(\sigma^2 - \omega^2)}$$

$$2RC\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) + \frac{4\left(-\frac{R}{2L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}{\left(\left(-\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)^2\right)}$$

$$2RC\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \frac{\left(\frac{2R}{L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}{\left(\frac{R^2}{4L^2}\right) - \left(\left(\frac{R^2}{4L^2}\right) - \frac{1}{L \cdot C}\right)}$$

$$2RC\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \frac{\left(\frac{2R}{L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}{\left(\frac{R^2}{4L^2}\right) - \left(\frac{R^2}{4L^2}\right) + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$2RC\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{2RLC}{L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)$$

$$2RC\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - (2RC)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) = 0$$

Nebenrechnung Term2

$$(LC)\cdot(\omega^2-\sigma^2)+\left(\frac{\omega-\sigma}{(\sigma+\omega)}\right)+(RC)\cdot(\omega-\ \sigma)$$

$$(LC)\cdot(\omega^2-\sigma^2)+\left(\frac{(\omega-\ \sigma)^2}{(\sigma+\omega)(\omega-\ \sigma)}\right)+(RC)\cdot(\omega-\ \sigma)$$

$$(LC)\cdot(\omega^2-\sigma^2)+\left(\frac{(\omega-\ \sigma)^2}{(\omega^2-\sigma^2)}\right)+(RC)\cdot(\omega-\ \sigma)$$

$$(LC)\cdot\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)^2-\left(-\frac{R}{2L}\right)^2\right)+\left(\frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)-\left(-\frac{R}{2L}\right)\right)^2}{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)^2-\left(-\frac{R}{2L}\right)^2\right)}\right)+(RC)\cdot\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)-\left(-\frac{R}{2L}\right)\right)$$

$$(LC)\cdot\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)+\frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+\left(\frac{R}{2L}\right)\right)^2}{\left(\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}\right)-\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)\right)}+(RC)\cdot\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+\left(\frac{R}{2L}\right)\right)$$

$$-1+\frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+\left(\frac{R}{2L}\right)\right)^2}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)}+(RC)\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+\left(\frac{R^2C}{2L}\right)$$

$$-1-LC\cdot\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+\left(\frac{R}{2L}\right)\right)^2+(RC)\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+\frac{R^2C}{2L}$$

$$-1-LC\cdot\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}+\left(\frac{R}{L}\right)\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)+(RC)\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+\frac{R^2C}{2L}$$

$$-1-LC\cdot\left(\frac{R^2}{2L^2}-\frac{1}{L\cdot C}+\left(\frac{R}{L}\right)\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+(RC)\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+\frac{R^2C}{2L}$$

$$-1+\left(\frac{-LCR^2}{2L^2}-\frac{-LC}{L\cdot C}+\left(\frac{-RLC}{L}\right)\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}\right)+(RC)\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+\frac{R^2C}{2L}$$

$$-1-\frac{R^2C}{2L}+1-RC\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+(RC)\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+\frac{R^2C}{2L}$$

$$-RC\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}+(RC)\cdot\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}=0$$

Nebenrechnung Term3

$$(LC) \cdot (\sigma^2 - \omega^2) + \frac{(\omega + \sigma)}{(\sigma - \omega)} + (RC) \cdot (\omega + \sigma)$$

$$(LC) \cdot \left(\left(-\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)^2\right) + \frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) + \left(-\frac{R}{2L}\right)\right)}{\left(\left(-\frac{R}{2L}\right) - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)} + (RC) \cdot \left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) + \left(-\frac{R}{2L}\right)\right)$$

$$(LC) \cdot \left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}\right) + \frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)\right)}{\left(\left(-\frac{R}{2L}\right) - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)} + (RC) \cdot \left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)\right)$$

$$\left(\frac{LC}{LC}\right) - \frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)\right)}{\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)} + \left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R^2C}{2L}\right)$$

$$1 - \frac{\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)\right)}{\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)} + \left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \frac{R^2C}{2L}$$

$$\frac{2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)}{2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)} - \frac{2L\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)\right)}{2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)} + \frac{2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)\left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)}{2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)} - \frac{R^2C\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)}{2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)}$$

Betrachtung des Zählers

$$2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right) - 2L\left(\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)\right) + 2L\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)\left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - R^2C\left(\left(\frac{R}{2L}\right) + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)$$

$$\frac{2LR}{2L} + 2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} - 2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} + \frac{2LR}{2L} + \left(\left(\frac{2LR}{2L}\right) + \left(2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right)\left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) - \frac{R^3C}{2L} - R^2C\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$R + R + \left(\left(\frac{2LR}{2L}\right)\left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) + \left(2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\left((RC) \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)\right) - \frac{R^3C}{2L} - R^2C\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$2R + (R^2C)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) + \left(2RCL\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}\right)\right) - \frac{R^3C}{2L} - R^2C\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$2R+\left(2RCL\left(\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)-\frac{1}{L\cdot C}\right)\right)-\frac{R^3C}{2L}$$

$$2R+\frac{R^3C}{2L}-\frac{2RL}{L}-\frac{R^3C}{2L}$$

$$2R+\frac{R^3C}{2L}-2R-\frac{R^3C}{2L}$$

$$\frac{R^3C}{2L}-\frac{R^3C}{2L}=0$$

Damit ist gezeigt, dass alle drei Terme 0 werden, die Gleichung ist daher richtig gelöst.

3) Schwingungsfall, die Wurzeln sind konjungiert komplex

$$\sigma=-\frac{R}{2L}\ und\ \omega=\sqrt{\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$s_1=(\sigma+j\omega)$$
$$s_2=(\sigma-j\omega)$$

$$u_R(t)=e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left(\cos(\omega t)-\frac{\sigma}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)$$

Zur Probe berechnen wir wiederum die Teilspannungen

$$u_L(t)=\frac{L}{R}\cdot\frac{du_R(t)}{dt}$$

$$u_L(t)=\frac{L}{R}\cdot\frac{d\left(e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left(\cos(\omega t)-\frac{\sigma}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)\right)}{dt}$$

$$u_L(t)=\frac{L}{R}\cdot\left[\left(\sigma\cdot e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left(\cos(\omega t)-\frac{\sigma}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)\right)+\left(e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left(-\omega\cdot\sin(\omega t)-\frac{\sigma}{\omega}\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)\right)\right)\right]$$

$$u_L(t)=\frac{L}{R}\cdot e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left[\left(\sigma\cdot\left(\cos(\omega t)-\frac{\sigma}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)\right)+\left((-\omega\cdot\sin(\omega t)-\sigma\cdot\cos(\omega t)\right)\right]$$

$$u_L(t)=\frac{L}{R}\cdot e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left[\sigma\cdot\cos(\omega t)-\frac{\sigma^2}{\omega}\cdot\sin(\omega t)-\omega\cdot\sin(\omega t)-\sigma\cdot\cos(\omega t)\right]$$

$$u_L(t)=\frac{L}{R}\cdot e^{\sigma t}\cdot U\cdot\left[-\frac{\sigma^2}{\omega}\cdot\sin(\omega t)-\omega\cdot\sin(\omega t)\right]$$

$$u_L(t)=-\frac{L}{R}\cdot e^{\sigma t}\cdot U\cdot\sin(\omega t)\cdot\left(\frac{\omega^2+\sigma^2}{\omega}\right)$$

$$u_L(t) = -\frac{L}{\omega R} \cdot e^{\sigma t} \cdot U \cdot \sin(\omega t) \cdot \left(\left(\left(\left(\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R^2}{4L^2} \right) \right) \right) + \left(\frac{R^2}{4L^2} \right) \right) \right)$$

$$u_L(t) = -\frac{L}{\omega R} \cdot e^{\sigma t} \cdot U \cdot \sin(\omega t) \cdot \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{R^2}{4L^2} \right)$$

$$u_L(t) = -\frac{L}{\omega R} \cdot e^{\sigma t} \cdot U \cdot \sin(\omega t) \cdot \left(\frac{1}{LC} \right)$$

$$u_L(t) = -\frac{U}{\omega RC} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \int u_R(t) dt \, , u_C(0) = 0$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \int \left(e^{\sigma t} \cdot U \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \sin(\omega t) \right) \right) dt$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \int \left(e^{\sigma t} \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \sin(\omega t) \right) \right) dt$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \int \left(e^{\sigma t} \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \sin(\omega t) \right) \right) dt$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\int (e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t)) \, dt + \frac{R}{2\omega L} \cdot \int (e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)) \, dt \right]$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\sigma \cdot cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\sigma \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)) + K \right]$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\sigma \cdot cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\sigma \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)) + K \right]$$

Bestimmung der Integrationskonstanten

$$u_C(0) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\left(\frac{e^{\sigma 0}}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\sigma \cdot cos(\omega 0) + \omega \cdot \sin(\omega 0)) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \left(\frac{e^{\sigma 0}}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\sigma \cdot \sin(\omega 0) - \omega \cdot \cos(\omega 0)) + K \right] = 0$$

$$\frac{U}{RC} \cdot \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \left(\frac{1}{\sigma^2 + \omega^2} \right) (\cdot \, -\omega \cdot) + K \right] = 0$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + \frac{R}{2\omega L} \cdot \left(\frac{-\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + K = 0$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + \sigma \cdot \left(\frac{1}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + K = 0$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + \left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right) + K = 0$$

$$K = -\left(\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}\right)$$

Einsetzen

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2}\right)(\sigma \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot \left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2}\right)(\sigma \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)) - \left(\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}\right)\right]$$

$$u_C(t) = \frac{U}{RC} \cdot \left[\left(\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2}\right)((\sigma \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) - \frac{\sigma}{\omega}(\sigma \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t))) - \left(\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}\right)\right]$$

$$u_C(t) = \frac{U}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} \cdot \left[(e^{\sigma t})(\sigma \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t) - \frac{\sigma^2}{\omega} \cdot \sin(\omega t) + \sigma \cdot \cos(\omega t))) - (2\sigma)\right]$$

$$u_C(t) = \frac{U}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} \cdot \left[(e^{\sigma t})(2\sigma \cdot \cos(\omega t) + (\omega - \frac{\sigma^2}{\omega}) \cdot \sin(\omega t)) - 2\sigma\right]$$

Probe

$$u_C(0) = \frac{U}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} \cdot \left[(e^{\sigma 0})(2\sigma \cdot \cos(\omega 0) + (\omega - \frac{\sigma^2}{\omega}) \cdot \sin(\omega 0)) - 2\sigma\right]$$

$$u_C(0) = \frac{U}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} \cdot [(2\sigma \ -2\sigma] = 0$$

Plausibel

Zusammenführen

$$U = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$$

$$U = \left(-\frac{1}{\omega RC} \cdot e^{\sigma t} \cdot U \cdot \sin(\omega t)\right) + \left(\frac{U}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} \cdot \left[(e^{\sigma t})(2\sigma \cdot \cos(\omega t) + \left(\omega - \frac{\sigma^2}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t)) - 2\sigma\right]\right) + \left(e^{\sigma t} \cdot U \cdot \left(\cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot \sin(\omega t)\right)\right)$$

$$1 = \left(-\frac{1}{\omega RC} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)\right) + \left(\frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} \cdot \left[2\sigma \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \cos(\omega t) + \left(\omega - \frac{\sigma^2}{\omega}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \sin(\omega t) - 2\sigma\right]\right) + e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$1 = \left(-\frac{1}{\omega RC} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)\right) + \left(\frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) \cdot 2\sigma \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \cos(\omega t) + \left(\frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) \cdot \left(\frac{\omega^2 - \sigma^2}{\omega}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \sin(\omega t) - \left(\frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) \cdot 2\sigma + e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$1 = -\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \cos(\omega t) + \left(\frac{\omega^2 - \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)\omega RC}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \sin(\omega t) - \left(\frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) + e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$1 + \frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} = -\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \cos(\omega t) + \left(\frac{\omega^2 - \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)\omega RC}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \sin(\omega t) + e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$1 + \frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} = +\left(\frac{\omega^2 - \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)\omega RC}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \sin(\omega t) - \left(\frac{1}{\omega RC}\right) \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \cos(\omega t) + e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t)$$

$$1 + \frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} = \left(\frac{\omega^2 - \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)\omega RC} - \frac{1}{\omega RC} - \frac{\sigma}{\omega}\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC} + 1\right) \cdot (e^{\sigma t}) \cdot \cos(\omega t)$$

Term 1 & 3

$$1 + \frac{2\sigma}{(\sigma^2 + \omega^2)RC}$$

$$1+\frac{2\left(-\frac{R}{2L}\right)}{\left(\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)+\left(\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)\right)RC}$$

$$1+\frac{-\frac{R}{L}}{\left(\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)+\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)RC}$$

$$1-\frac{1}{\left(\frac{1}{LC}\right)LC}$$

$$1-\frac{1}{1}=0$$

Term 2

$$\frac{\omega^2-\sigma^2}{(\sigma^2+\omega^2)\omega RC}-\frac{1}{\omega RC}-\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)-\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)}{\left(\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)+\left(\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)\right)\left(\sqrt{\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)RC}-\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)RC}-\frac{\left(-\frac{R}{2L}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{L\cdot C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}$$

$$\frac{\frac{1}{LC}-2\left(\frac{R^2}{4L^2}\right)}{\left(\frac{1}{LC}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)RC}-\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)RC}+\frac{R}{2L\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}$$

$$\frac{\frac{2L}{2L^2C}-\frac{R^2C}{2L^2C}}{\left(\frac{R}{L}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}-\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)RC}+\frac{R}{2L\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}$$

$$\frac{2L^2C\,\frac{2L-R^2C}{2L^2C}}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}-\frac{2L}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}+\frac{R^2C}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}$$

$$\frac{2L-R^2C}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}-\frac{2L}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}+\frac{R^2C}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}$$

$$\frac{2L-R^2C-2L+R^2C}{2RLC\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)}=0$$

Damit ist auch diese Formel bewiesen.

4) Simulation

Dafür wurden folgende Bauteilewerte verwendet:

Aperiodischer Grenzfall	L=2,5H, C=100nF, R=10kΩ	$\sigma = -2000$	$\omega = 0$
Kriechfall	L=2,5H, C=100nF, R=20kΩ	$\sigma = -4000$	$\omega = 3464$
Schwingfall	L=2,5H, C=100nF, R=5kΩ	$\sigma = -1000$	$\omega = 1732$