Die konkrete Laplace – Transformation hin und zurück

Wolfgang Tomischko
Ao.Prof. Dipl. Ing. Dr. Winfried Auzinger

1. Abstract

Trotz ihres beträchtlichen Alters und ihrer weiten Verbreitung sind die Herleitung der Laplace – Transformation sowie deren Inversion und deren konkrete Berechnung wenig dokumentiert. In der Praxis werden die bequemen Korrespondenztabellen verwendet. In diesem Aufsatz sollen einige Herleitungen sowie Berechnungsverfahren Schritt für Schritt ausgeführt werden.

2. Die Berechnung der Laplace – Transformierten einiger Grundfunktionen

Zum Einstieg sollen die Laplace – Transformierten einiger Grundfunktionen direkt berechnet werden.

Es gelte allgemein die Konvergenzbedingung: Re(s) $>$ a

2.1. Exponentialfunktion

$$\mathcal{L}\{e^{a\,t}\} = \int_0^\infty (e^{a\,t})\, e^{-s\,t}\, dt$$

Eq01

$$\int_0^\infty \left(e^{(a-s)t}\right)\, dt$$

Eq02

$$\left(\frac{1}{(a-s)}\, e^{(a-s)t}\right)\Big|_0^\infty$$

Eq03

$$\frac{1}{(a-s)}\left(e^{(a-s)\infty} - e^{(a-s)0}\right)$$

Eq04

$$\frac{1}{(a-s)}\,(e^{-\infty} - e^{-0})$$

$$\frac{1}{(a-s)}\,(0-1)$$

Eq05

$$\mathcal{L}\{e^{a\,t}\} = \frac{1}{(s-a)}$$

Eq06

2.2. Cosinus

$$\mathcal{L}\{\cos{(a\,t)}\} = \int_0^\infty (\cos{(a\,t)})\, e^{-s\,t}\, dt$$

Eq07

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{j\,a\,t} + e^{-ja\,t}}{2}\right) e^{-s\,t}\, dt$$

Eq08

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{j\,a\,t} + e^{-j\ \ t}\right) e^{-s\,t}\, dt$$

Eq09

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \left(e^{j\,a\,t - s\,t} + e^{-ja\,t - s\,t}\right)\, dt\right)$$

Eq10

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \left(e^{(j\,a - s)\,t} + e^{(-ja - s)\,t}\right)\, dt\right)$$

Eq11

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \left(e^{(j\,a - s)\,t}\right)\, dt + \int_0^\infty \left(e^{(-j\,a - s)\,t}\right) dt\right)$$

Eq12

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{(ja - s)} e^{(ja - s)t}\right)\Big|_0^\infty + \left(\frac{1}{(-ja - s)} e^{(-ja - s)t}\right)\Big|_0^\infty\right)$$

Eq13

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{(ja - s)\,\infty} - e^{(ja - \ )\,0}}{(ja - s)}\right) + \left(\frac{e^{(-ja - \ )\,\infty} - e^{(-ja - s)\,0}}{(-ja - s)}\right)\right)$$

Eq14

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{0 - 1}{(ja - s)}\right) + \left(\frac{0 - 1}{(-ja - s)}\right)\right)$$

Eq15

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s - ja)} + \frac{1}{(s + ja)}\right)$$

Eq16

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s + ja}{(s - ja)(s + ja)} + \frac{s - ja}{(s - ja)(s + ja)}\right)$$

Eq17

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s + ja + s - ja}{(s^2 + a^2)}\right)$$

Eq18

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2s}{(s^2 + a^2)}\right)$$

Eq19

$$\mathcal{L}\{\cos{(a\,t)}\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)}$$

Eq20

2.3. Sprungfunktion vereinfacht

$$\mathcal{L}\{a\} = \int_0^\infty a\, e^{-s\,t}\, dt$$

Eq21

$$a \int_0^\infty e^{-s\,t}\; dt$$

Eq22

$$-\frac{a}{s}(e^{-st})|_0^\infty$$

Eq23

$$-\frac{a}{s}(e^{-\infty} - e^{-0})$$

Eq24

$$-\frac{a}{s}(0-1)$$

Eq25

$$\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s}$$

Eq26

2.4. Lineare Funktion

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty t \cdot e^{-s\,t}\, dt$$

Eq27

Partielle Integration

$$u = t$$

Eq28

$$u' = 1$$

Eq29

$$v' = e^{-s\,t}$$

Eq30

$$v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

Eq31

$$\left(t \cdot -\frac{e^{-s}}{s}\right)|_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot -\frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

Eq32

$$-\left(t \cdot \frac{e^{-st}}{s}\right)|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

Eq33

$$-\left(t \cdot \frac{e^{-st}}{s}\right)|_0^\infty - \left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)|_0^\infty$$

Eq34

$$-\left(\infty \cdot \frac{e^{-s\infty}}{s} - 0 \cdot \frac{e^{-s0}}{s}\right) - \left(\frac{e^{-s\infty}}{s^2} - \frac{e^{-s0}}{s^2}\right)$$

Eq35

Die Exponentialfunktion wächst schneller als die lineare

$$-(0) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right)$$

Eq36

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Eq37

Diese Transformationen gelingen unter Beachtung der Konvergenzbedingung elementar.

3. Die Berechnung der Laplace – Transformierten der Integralfunktion

Beim Aufstellen der Laplace – Transformation der Integralfunktion ist die korrekte Verwendung der Zeitvariablen t (Argument der zeitabhängigen Funktionswerte) und T (Zeitpunkt des Endes der Messung) essentiell! Transformiert wird jedenfalls die Funktion f(T), die vom momentanen Zeitpunkt abhängigen Funktionswerte f(t) sind im Laplace – Raum kein Thema! [1]

$$(\mathcal{L}g)(T) = \mathcal{L}\left(\int_0^T f(t)dt\right) = \int_0^\infty \left(\int_0^T f(t)dt\right) e^{-sT}\, dT$$

Eq38

partielle Integration mit

$$u = \int_0^T f(t)dt$$

Eq39

$$v' = e^{-sT}$$

Eq40

Aufpassen: Wir integrieren zwar uneigentliche, aber bestimmte Integrale, daher muss die Auswertung beim Glied u · v beachtet werden! Damit gilt

$$\int_0^\infty \left(\int_0^T f(t)dt\right) e^{-sT}\, dT = \left(\left(\int_0^T f(t)dt\right)\cdot\frac{e^{-sT}}{-s}\right)\Bigg|_{T=0}^{\infty} - \int_0^\infty \left(\int_0^T f(t)dt\right)'\cdot\left(\frac{e^{-sT}}{-s}\right) dT$$

Eq41

Teilergebnis 1 (ein wenig schlampig, da man eigentlich beweisen müsste, dass keine unbestimmten Ausdrücke auftreten, aber da seien wir einmal gläubig; außerdem ist unendlich keine Zahl):

$$\left(\left(\int_0^T f(t)dt\right)\cdot\frac{e^{-sT}}{-s}\right)\Bigg|_{T=0}^{\infty} = \left(\left(\int_0^\infty f(t)dt\right)\cdot\frac{e^{-s\cdot\infty}}{-s}\right) - \left(\left(\int_0^0 f(t)dt\right)\cdot\frac{e^{-s\cdot 0}}{-s}\right) = 0$$

Eq42

Teilergebnis 2 (Hauptsatz!)

$$\left(\int_0^T f(t)dt\right)' = \big(F(T) - F(0)\big)' = f(T)$$

Eq43

Zusammengefasst

$$\int_0^\infty \left(\int_0^T f(t)dt\right) e^{-sT}\, dT = -\int_0^\infty f(T)\cdot\left(\frac{e^{-sT}}{-s}\right) dT = \frac{1}{s}\cdot\int_0^\infty f(T)\cdot\left(e^{-sT}\right) dT = \frac{(\mathcal{L}f)(T)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Eq44

[1] Siehe auch https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-a-zeitkontinuierliche-signale-und-systeme/laplace-transformation-zeitkontinuierlicher-signale/rechenregeln-der-laplace-transformation/integrationsregel.html , letzter Zugriff 03.04.2021. Man beachte den Rechenfehler!

Damit ist die Laplace – Transformation der Integralfunktion gezeigt.

4. Die formale Herleitung der Laplace – Inversionsformel

Ausgangspunkt ist die Formel der inversen Fourier – Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

Eq45

Erweitern mit j. Da dω zwar infinitesimal klein, trotzdem aber eine Zahl ist, darf man das. Entsprechend ändern sich auch Argument und Integrationsgrenzen.

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\, j} \int_{j\omega=-j\infty}^{j\omega=j\infty} F(j\omega) \cdot e^{(j\omega)t}\, d(j\omega)$$

Eq46

Die Abklingfunktion addieren

$$j\omega \rightarrow (\sigma + j\omega)$$

Eq47

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\, j} \int_{\sigma+j\omega=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\omega=\sigma+j\infty} F(\sigma + j\omega) \cdot e^{(\sigma+j\omega)t}\, d(\sigma + j\omega)$$

Eq48

Umbenennen.[2]

$$(\sigma + j\omega) = s$$

Eq49

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\, j} \int_{s=(\sigma-j\infty)}^{s=(\sigma+j\infty)} F(s) \cdot e^{st}\, ds$$

Eq50

Damit ist diese Herleitung vollendet.

[2] In der Literatur ist statt des s auch das p verbreitet.

5. Die Berechnung der Laplace – Inversionsformel[3]

Die Vorgeschichte: Ausgangspunkt der Transformationsarbeit war die Berechnung der Fourier – Transformierten eines zeitabhängigen Signals f(t) in den Frequenzraum F(ω). Wird das kontinuierliche Fourier – Integral verwendet, führt die Transformation periodischer Signale zu Distributionen, welche in der praktischen Handhabung unangenehm sind. Eine mögliche Abhilfe ist die Bedämpfung des zeitabhängigen Signals, wobei im ersten Schritt ausschließlich der kausale Anteil (t ≥ 0) verwendet wird und dieser dann noch mit einer Abklingfunktion $e^{-\sigma}$, σ > 0 bedämpft wird. Damit ist die Existenz des entstandenen Laplace – Integrals

$$F(s) = (\mathcal{L}\,\mathrm{f})(\mathrm{t}) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, ds\,;\; s = (\sigma + j\omega)$$

Eq51

gesichert. Die Berechnung dieser Integrale ist in vielen Fällen elementar, Beispiele sind im nächsten Kapitel durchgerechnet. Abgesehen davon sind umfangreiche Korrespondenztabellen verfügbar, in denen die meisten praktisch benötigten Ergebnisse gelistet sind.

Nach der Ausführung der gewünschten mathematischen Operationen (z.B. Differenzialgleichungen, Signalanalyse) folgt als nächster Schritt die Rücktransformation in den Zeitraum.

Ausgangspunkt der Herleitung der Inversionsformel ist die Cauchy´sche Integralformel[4]. Die stückweise glatte, geschlossene Kurve Γ sei der Rand des Gebietes D ⊆ ℂ. F(s) ist das Bild von f(t) im Laplace – Raum. F(s) ist aufgrund der essentiellen Konvergenzbedingung Re(s) = σ > α holomorph[5]. Des Weiteren liege s ∊ ℂ im Inneren von D. Dann gilt für F(s) die Darstellung als Cauchy – Integral

$$F(s) = \frac{1}{2\,\pi\, j}\oint_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\, d\zeta$$

Eq52

Die Magie der Cauchy´schen Integralformel liegt darin, dass die Werte der Funktion innerhalb des Gebietes D durch ihre Wert auf dem Rand von D bereits eindeutig festgelegt sind[6].

Die geschlossene Kurve Γ wählt man so, dass sie s einmal umläuft und innerhalb des Holomorphiegebietes bleibt. Dazu konstruiert man Γ aus der Geraden von (σ – j R) nach (σ + j R)

$$\Gamma_1 = (\,\sigma + j\,R\,t), für - 1\; \le t\; \le +1, R \to \infty$$

Eq53

und den anschließenden rechten Halbkreis um σ mit dem Radius R.

$$\Gamma_2 = \left(\sigma + R\; \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right), für - 1\; \le t\; \le +1, R \to \infty$$

Eq54

Daher

---

[3] Dieser Text stammt grundsätzlich aus „Matthias Böckmann: Laplace-Transformation I: Grundlagen“, Westfälische Wilhelms-Universität Münster Fachbereich Mathematik. Alle Änderungen, Ergänzungen sowie Umkehrung der Argumentationsrichtung aus didaktischen Gründen.

[4] Herleitung siehe beispielsweise Analysis II für TPH Ausgabe 2018, S.209.

[5] α nennt man auch die Konvergenzabszisse.

[6] Aus Ana II TPH 2018 S. 209.

$$2\,\pi\,j\,F(s) = \oint_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta = \int_{\Gamma 1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta + \int_{\Gamma 2} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta$$

Eq55

Das Integral über den Halbkreis Γ_2 liefert keinen Beitrag, sofern das Integral entweder[7]

Typ 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx\,, grad(p) + 2 \leq grad(q)$$

Eq56

Typ 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,e^{ix}dx\,, grad(p) + 1 \leq grad(q)$$

Eq57

ist, p(x) und q(x) reelle Polynome sind und q(x) ohne reelle Nullstellen ist. Erfahrungsgemäß sind sämtliche Integranden der Laplace – Inversionsformel ausgenommen die Ableitungsfunktion vom Typ 2, sodass die Aussage

$$\int_{\Gamma 2} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta = 0$$

Eq58

als in der Praxis allgemein gültig betrachtet werden kann.

Somit erhält man[8]

$$F(s) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \oint_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta$$

Eq59

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - s}\,d\zeta\right\}$$

Eq60

Daraus

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta - s}\right\} F(\zeta)\,d\zeta$$

Eq61

Zur Transformation des Bruchausdrucks verwenden wir die Korrespondenztabelle

---

[7] Typisierung gemäß Ana II TPH 2018, S. 224ff. Der Beweis für Typ 1 ist elementar, für Typ 2 verwendet man statt des Halbkreises das darüber errichtete Rechteck mit Höhe √ r, das gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Den kompletten Beweis findet man unter https://de.wikipedia.org/wiki/Residuensatz .

[8] Vorsicht: Formelfehler im Böckmann – Text!

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}\,F(\zeta)\,d\zeta$$

Eq62

Als letzten Schritt integrieren wir statt nach ζ nun nach s. Wie das zu argumentieren ist, bleibt leider unbekannt. Jedenfalls erhält man das gewünschte Ergebnis

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}\,F(s)\,ds$$

Eq63

6. Die konkrete Anwendung der Laplace – Inversionsformel[9]

Die Auswertung dieses Integrals ist meist nicht elementar möglich, man muss einen kleinen Umweg gehen. Dieser ist leider schlecht dokumentiert, da in der Praxis die weitaus einfacher handhabbaren Korrespondenztabellen verwendet werden. Daher soll an dieser Stelle das Konzept der praktischen Berechnung der Rücktransformation mittels des Residuensatzes dargestellt werden.

Für die Herleitung der Residuenformel benötigt man einen geschlossenen Integrationsweg, der alle Polstellen z_k von $e^{st} \cdot F(s)$ umschließt. Diese entsprechen den Polstellen von F(s), weil e^{st} selbst keine Pole im Endlichen besitzt. Da F(s) für $Re(s) > \alpha$ holomorph ist, befinden sich die Polstellen links von dem Gebiet, in dem F(s) holomorph ist. Der Integrationsweg I wird wie folgt festgelegt: Er umfasst die Gerade von $(\sigma - j R)$ nach $(\sigma + j R)$ und den linken Halbkreis γ um σ, $\sigma \in R^+$ mit $R \to \infty$.

Durch die Konstruktion von I ist ein einmaliger Umlauf sichergestellt, daher liefert der Residuensatz

$$\oint_{\Gamma} f(z)\ dz = 2\,\pi\, j \cdot \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}(z_k)$$

Eq64

das spezielle Ergebnis

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\, j} \cdot \int_{\mathrm{I}} e^{st}\, F(s)\, ds = \frac{1}{2\,\pi\, j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} e^{st}\, F(s)\, ds + \frac{1}{2\,\pi\, j} \cdot \int_{\gamma} F(s)\, e^{st}\, ds = \sum_{k=1}^{n} Res(s_k)$$

Eq65

geht mit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} F(s)\, e^{st}\, ds = 0$$

Eq66

in die komplexe Umkehrformel über:

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\, j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} e^{st}\, F(s)\, ds = \sum_{k=1}^{n} Res(s_k), t \geq 0$$

Eq67

wobei $Res(s_k)$ das Residuum der Funktion $e^{st} \cdot F(s)$ am jeweiligen Punkt $s = s_k$ für endlich viele Punkte s_k ist.

[9] Dieser Text stammt grundsätzlich aus „Matthias Böckmann: Laplace-Transformation I: Grundlagen", Westfälische Wilhelms-Universität Münster Fachbereich Mathematik. Alle Änderungen, Ergänzungen sowie Umkehrung der Argumentationsrichtung aus didaktischen Gründen.

7. Die konkrete Berechnung einiger Laplace – Rücktransformationen

7.1. Exponentialfunktion

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)}$$

Eq68

Polstelle an s = a. Daher suchen wir

$$\operatorname*{Res}_{s=a}\left(\frac{e^{st}}{(s-a)}\right)$$

Eq69

Die Reihenentwicklung (Achtung: Keine MacLaurin – Reihe!) führt auf

$$\frac{e^{st}}{(s-a)} = \frac{1}{(s-a)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{st})^{f(k)} |\, s=a}{k!} (s-a)^k$$

Eq70

$$= \frac{1}{(s-a)} \cdot \left(\frac{(e^{st}) |\, s=a}{0!} (s-a)^0 + \frac{(e^{st})' |\, s=a}{1!} (s-a)^1 + \frac{(e^{st})'' |\, s=a}{2!} (s-a)^2 + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{(s-a)} \cdot \left(\frac{(e^{st}) |\, s=a}{1} + \frac{(t \cdot e^{st}) |\, s=a}{1} (s-a) + \frac{(t^2 \cdot e^{st}) |\, s=a}{2} (s-a)^2 + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{(s-a)} \cdot \left(\frac{(e^{at})}{1} + \frac{(t \cdot e^{at})}{1} (s-a) + \frac{(t^2 \cdot e^{at})}{2} (s-a)^2 + \cdots \right)$$

$$= \frac{(e^{at})}{(s-a)} + \frac{(t \cdot e^{at})}{(s-a)} (s-a) + \frac{(t^2 \cdot e^{at})}{2(s-a)} (s-a)^2 + \cdots$$

$$= \frac{(e^{at})}{(s-a)} + (t \cdot e^{at}) + \frac{(t^2 \cdot e^{at})}{2} (s-a) + \cdots$$

Eq71

Damit ist das Residuum

$$\operatorname*{Res}_{s=a}\left(\frac{e^{st}}{(s-a)}\right) = e^{at}$$

Eq72

Einsetzen:

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \cdot \left(\frac{1}{(s-a)}\right) \cdot ds = \operatorname*{Res}_{s=a}\left(\frac{e^{st}}{(s-a)}\right) = e^{at}$$

Eq73

7.2. Cosinus

$$\mathcal{L}\{\cos(a\,t)\} = \frac{s}{(s^2+a^2)}$$

Eq74

Polstellen an $s_1 = +ja$ und $s_2 = -ja$.

$$\frac{s}{(s^2+a^2)} = s \cdot \frac{1}{(s+ja)} \cdot \frac{1}{(s-ja)}$$

Eq75

Daher suchen wir

$$\underset{s_1 = +j}{\operatorname{Res}} \left(\frac{s}{(s^2+a^2)} \cdot e^{st}\right)$$

Eq76

Und

$$\underset{s_2 = -ja}{\operatorname{Res}} \left(\frac{s}{(s^2+a^2)} \cdot e^{st}\right)$$

Eq77

Die Reihenentwicklung an s_1 führt zu

$$\frac{s}{(s^2+a^2)} \cdot e^{st} = \frac{1}{(s-ja)} \cdot \frac{s}{(s+ja)} \cdot e^{st} = \frac{1}{(s-ja)} \cdot \left(\frac{e^{st}}{1+\frac{ja}{s}}\right)$$

Eq78

Taylor – Reihe

$$\frac{e^{st}}{\left(1+\frac{ja}{s}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{e^{st}}{1+\frac{ja}{s}}\right)^{f(k)} \mid s = ja}{k!} (s-ja)^k$$

Eq79

$$\frac{\left(\frac{e^{st}}{1+\frac{ja}{s}}\right) \mid s = ja}{0!} + \frac{\left(\frac{e^{st}}{1+\frac{ja}{s}}\right)' \mid s = ja}{1!} (s-ja) + \cdots$$

Eq80

Die Reihe kann nach dem ersten Glied abgebrochen werden, da die höheren Glieder keinen Betrag zum Residuum leisten können.

$$\frac{\left(\frac{e^{st}}{1+\frac{ja}{s}}\right) \mid s = ja}{0!} + \cdots = \frac{\left(\frac{e^{jat}}{1+\frac{ja}{ja}}\right)}{1} + \cdots = \frac{\left(\frac{e^{jat}}{2}\right)}{1} + \cdots = \left(\frac{e^{jat}}{2}\right) + \cdots$$

Eq81

Daher

$$\frac{1}{(s-ja)} \cdot \left(\frac{e^{st}}{1+\frac{ja}{s}}\right) = \frac{1}{(s-ja)} \cdot \left(\left(\frac{e^{jat}}{2}\right) + \cdots\right)$$

Eq82

$$\underset{s_1 = +ja}{\operatorname{Res}} \left(\frac{s}{(s^2+a^2)} \cdot e^{st}\right) = \left(\frac{e^{jat}}{2}\right)$$

Eq83

Die zweite Polstelle

$$\underset{s_2 = -j}{\text{Res}} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)} \cdot e^{st} \right)$$

Eq84

Die Reihenentwicklung an s_2 führt zu

$$\frac{s}{(s^2 + a^2)} \cdot e^{st} = \frac{1}{(s + ja)} \cdot \frac{s}{(s - ja)} \cdot e^{st} = \frac{1}{(s + ja)} \cdot \left(\frac{e^{st}}{1 - \frac{ja}{s}} \right)$$

Eq85

Taylor – Reihe

$$\frac{e^{st}}{\left(1 - \frac{ja}{s}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{e^{st}}{1-\frac{ja}{s}}\right)^{f(k)} | \, s = -ja}{k!} (s + ja)^k$$

Eq86

$$\frac{\left(\frac{e^{st}}{1-\frac{ja}{s}}\right) | \, s = -ja}{0!} + \cdots = \frac{\left(\frac{e^{-jat}}{1+\frac{ja}{ja}}\right)}{1} + \cdots = \left(\frac{e^{-jat}}{2}\right) + \cdots$$

Eq87

Daher

$$\frac{1}{(s + ja)} \cdot \left(\frac{e^{-s}}{1 - \frac{ja}{s}} \right) = \frac{1}{(s + ja)} \cdot \left(\left(\frac{e^{-jat}}{2} \right) + \cdots \right)$$

Eq88

$$\underset{s_2 = -ja}{\text{Res}} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)} \cdot e^{st} \right) = \left(\frac{e^{-jat}}{2} \right)$$

Eq89

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \cdot \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)} \right) \cdot ds$$

Eq90

$$= \underset{s_1 = +ja}{\text{Res}} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)} \cdot e^{st} \right) + \underset{s_2 = -ja}{\text{Res}} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)} \cdot e^{st} \right) = \left(\frac{e^{jat}}{2} \right) + \left(\frac{e^{-jat}}{2} \right) = \cos{(at)}$$

Eq91

7.3. Sprungfunktion vereinfacht

$$F(s) = \frac{a}{s}$$

Eq92

Polstelle an s = 0. Daher suchen wir

$$\underset{s=0}{\text{Res}} \left(a \cdot \frac{e^{st}}{s} \right)$$

Eq93

Die Reihenentwicklung führt auf

$$\frac{e^{st}}{s} = \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!} = \frac{1}{s} + t + \frac{(st)^2}{s \cdot 2!} + \ \ldots$$

Eq94

Damit ist das Residuum

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(a \cdot \frac{e^{st}}{s}\right) = a$$

Eq95

Einsetzen:

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \cdot \left(\frac{a}{s}\right) \cdot ds = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(a \cdot \frac{e^{st}}{s}\right) = a$$

Eq96

7.4. Lineare Funktion

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Eq97

Polstelle an $s = 0$. Daher suchen wir

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\frac{e^{st}}{s^2}\right)$$

Eq98

Die Reihenentwicklung führt auf

$$\frac{e^{st}}{s^2} = \frac{1}{s^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!} = \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{(st)^0}{0!} + \frac{(st)^1}{1!} + \frac{(st)^2}{2!} + \ \dots\right)$$

Eq99

$$= \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{st}{1} + \frac{s^2t^2}{2} + \ \dots\right)$$

Eq100

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{st}{s^2} + \frac{s^2t^2}{s^2} + \ \dots$$

Eq101

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{t}{s} + \frac{t^2}{1} + \ \dots$$

Eq102

Damit ist das Residuum

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\frac{e^{st}}{s^2}\right) = t$$

Eq103

Einsetzen:

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j} \cdot \int_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \cdot \left(\frac{1}{s^2}\right) \cdot ds = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\frac{e^{st}}{s^2}\right) = t$$

Eq105

8. Zusammenfassung

Einige Herleitungen der Laplace – Transformation sowie deren Inversion inklusive konkrete Berechnungsverfahren wurden Schritt für Schritt dargestellt.